ALGORITMO DEL PERCEPTRON

A continuación veremos el algoritmo de convergencia de ajuste de pesos para realizar el aprendizaje de perceptrón (Aprendizaje por corrección de error) con n elementos procesales de entrada y un único elemento procesal de salida.

1. **Inicialización de los pesos y del umbral**

   Inicialmente se asignan los valores aleatorios a cada uno de los pesos w_i de las conexiones y al umbral ($-w_0 = \theta$)

2. **Presentación de un nuevo par** (entrada, salida esperada)
   Presentar un nuevo patrón de entrada $x_p = (x_1, x_2, ..., x_n)$, junto con la salida esperada d(t)

3. **Cálculo actual**

$$y(t) = f[\sum_{i} w_i(t)x_i\,(t)-\boldsymbol{\theta}]$$

   siendo f(x) la función de transferencia escalón.

4. **Adaptación de pesos**

$$w_i(t+1) = w_i(t) + \boldsymbol{\alpha}[d(t)-y(t)]x_i(t)$$
$$(0 \leq i \leq N)$$

   Donde d(t) representa la salida deseada, y será 1 si el patrón pertenece a la clase A, y -1 si es de la clase B. En estas ecuaciones, $\propto$ es un factor de ganancia en el rango 0.0 a 1.0. Este factor debe ser ajustado de forma que satisfaga tanto los requerimientos de aprendizaje rápido como la estabilidad de las estimaciones de los pesos (en el ejemplo de la operación OR, se considera $\propto= 1$). Este proceso se repite hasta que el error que se produce para cada uno de los patrones (diferencia entre el valor de salida deseado y obtenido) es cero o bien menor que un valor preestablecido. Obsérvese que los pesos no se cambian si la red ha tomado la decisión correcta.

5. **Volver al paso 2**

   Esta algoritmo es extensible al caso de múltiples neuronas en la capa de salida. El perceptrón será capaz de aprender a clasificar todas sus entradas, en un número finito de pasos, siempre y cuando el conjunto de los patrones de entrada sea linealmente separable. En tal caso, puede demostrarse que el aprendizaje de la red se realiaza en un número finito de pasos.

A continuación se muestra el ajusta de los pesos de las conexiones de una red que debe realizar la función **OR** utilizando el método expuesto. En este ejemplo, se va a realizar un umbral distinto de cero mediante la conocida conexión con entrada a 1 para aumentar el número de posible soluciones del problema.

a) Sean inicialmente los valores elegidos aleatoriamente

$$w_0 = 1.5$$

$$w_1 = 0.5$$

$$w_2 = 1.5$$

b) Se van tomando uno a uno los cuatro patrones de entrada y se aplica el método explicado.

b.1.) Se toma el patrón de entrada 00

Entradas: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_0 = 1$
Pesos: $w_1(t) = 0{,}5$; $w_2(t) = 1{,}5$; $w_0(t) = 1{,}5$
Net_i: $0\cdot(0{,}5) + 0\cdot(1{,}5) + 1\cdot(1{,}5) = 1{,}5$
Salida que produce f: 1 $(Net_i >= 0)$
Salida que debe dar (Deseada): 0
Error que se comete: (Deseada - Obtenida) = 0 -1 = -1
Pesos modificados: $w_1(t+1) = 0{,}5 + (-1)\cdot 0 = 0{,}5$
$w_2(t+1) = 1{,}5 + (-1)\cdot 0 = 1{,}5$
$w_0(t+1) = 1{,}5 + (-1)\cdot 1 = 0{,}5$

Podemos realizar los mismos cálculos tomando una colocación en forma matricial:

Entrada · Pesos = net ----> Salida = f(net)

$$[1 \;\; 0 \;\; 0] \cdot \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} = 1.5 \quad \Rightarrow \quad S = f(1.5) = 1$$

Error = (Deseada - Obtenida) = -1

Pesos $(t+1)$ = Pesos (t) + Error· Entrada

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \textit{Nuevos pesos}$$

b.2.) Se toma el patrón de entrada 01

Entradas: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_0 = 1$
Pesos: $w_1(t) = 0{,}5$; $w_2(t) = 1{,}5$; $w_0(t) = 0{,}5$
Net_i: $0 \cdot (0{,}5) + 1 \cdot (1{,}5) + 1 \cdot (0{,}5) = 2$
Salida que produce f (Obtenida): 1
Salida que debe dar (Deseada): 1
Error que se produce: (Deseada - Obtenida) = 0
Los pesos no se modifican: $w_i(t+1) = w_i(t)$

b.3.) Puede comprobarse que para las entradas 10 y 11 la salida obtenida es igual que la deseada, por lo que no se varían los pesos. En el caso de que no fuese así, se aplicaría el mismo método que se ha aplicado antes.

Existe un patrón de entrada, 00, para la cual el error cometido no es cero, por tanto, se realiza de nuevo a partir del punto b.

c) Se toman de nuevo los cuatro patrones de entrada:

c.1.) Se toma de nuevo el patrón de entrada 00

Entradas: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; 1
Pesos: $w_1(t) = 0{,}5$; $w_2(t) = 1{,}5$; $w_0(t) = 0{,}5$

Net_i: $0 \cdot (0{,}5) + 0 \cdot (1{,}5) + 1 \cdot (0{,}5) = 0{,}5$
Salida que produce f (Obtenida): 1
Salida que debe dar (Deseada): 0
Error que se comete: -1
Pesos modificados: $w_1(t+1) = 0{,}5 + (-1) \cdot 0 = 0{,}5$
$w_2(t+1) = 1{,}5 + (-1) \cdot 0 = 1{,}5$
$w_0(t+1) = 0{,}5 + (-1) \cdot 1 = -0{,}5$

En forma matricial:

Entrada · Pesos = *net* -----> Salida = f(net)

$$[1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} = 0.5 \quad \Rightarrow \; S = f(0.5) = 1$$

Error = (Deseada - Obtenida) = 0-1 = -1

Pesos $(t+1)$ = Pesos (t) + Error· Entrada

$$\begin{vmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \; Nuevospesos$$

c.2.) Se toma el patrón de entrada 01

Entradas: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; 1
Pesos: $w_1(t) = 0{,}5$; $w_2(t) = 1{,}5$; $w_0(t) = -0.5$
Net_i: 0·(0,5) + 1·(1,5) + 1·(-0,5) = 1
Salida que produce f: 1
Deseada: 1
Error que se comete: 0
No se modifican los pesos

c.3.) Puede comprobarse que para el resto de las entradas, 10 y 11, los pesos no varían.

Sigue habiendo una entrada cuyo error ha sido diferente de cero.

d) Se toman de nuevo los cuatro patrones de entrada:

d.1.) Patrón 00

Entradas: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; 1
Pesos: $w_1(t) = 0{,}5$; $w_2(t) = 1{,}5$; $w_0(t) = -0{,}5$
Net_i: 0·(0,5) + 0·(1,5) + 1·(-0,5) = -0,5
Salida que produce f: 0
deseado: 0
Error que se comete: 0
No se varían los pesos

d.2.) Si no han variado los pesos, entonces para el resto de las entradas el error cometido es cero (ver apartados **c.2** y **c.3**).

Con estos nuevos pesos, al calcular la salida que se obtiene para cualquiera de los cuatro patrones de entrada ya no se comete ningún error, por lo que la etapa de aprendizaje concluye.