



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
Facultad de ciencias básicas

# MODELO DE ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS USANDO INTELIGENCIA ARTIFICIAL

*Matemáticas fundamentales*

**Autores:**

Mg. Luis Fernando Alvarez V.  
Mg. Leonardo Alvarez V.  
Mg. Hernando Alvarez R.

**Monitor en Inteligencia Artificial:**

Luis Miguel Ospina O.

Pereira, Risaralda.  
Septiembre 2025

## **Contenido:**

1. Lógica Matemática.
2. Teoría de conjuntos.
3. Métodos de demostración.
4. Herramientas de Inteligencia artificial.
  - a)* Uso de inteligencia artificial generativa.
  - b)* Software educativo recomendado.
5. Conjuntos numéricos.
  - a)* Números naturales y números enteros.
  - b)* Números racionales.

## Introducción

Las matemáticas constituyen la base del pensamiento científico y tecnológico, y son esenciales para el desarrollo de competencias analíticas, críticas y de resolución de problemas. No obstante, los estudiantes suelen enfrentar dificultades para apropiarse de conceptos abstractos debido a metodologías tradicionales centradas en la transmisión mecánica de contenidos. En este contexto, la Inteligencia Artificial (IA), y particularmente la inteligencia artificial generativa (IAGen), permite crear experiencias educativas personalizadas, diseñar ejercicios interactivos, ofrecer explicaciones adaptadas y situar los contenidos en escenarios prácticos y significativos. Este modelo integra los pilares fundamentales lógica matemática, teoría de conjuntos, métodos de demostración y conjuntos numéricos con el uso estratégico de la IA para promover un aprendizaje activo, inclusivo y flexible que fortalezca comprensión, motivación y creatividad.

Un valor agregado de esta propuesta es su capacidad de articularse con **ALEKS** (Assessment and Learning in Knowledge Spaces), un sistema de aprendizaje automático ampliamente utilizado en la enseñanza de las matemáticas. **ALEKS** diagnostica con precisión las fortalezas y vacíos de cada estudiante, propone rutas personalizadas de estudio y asegura un avance progresivo en los contenidos. Al integrarlo con nuestro material y actividades generadas con IAGen, se potencia la experiencia de aprendizaje: mientras **ALEKS** organiza y guía el recorrido académico, la inteligencia artificial generativa enriquece el proceso con ejemplos dinámicos, explicaciones contextualizadas y ejercicios interactivos. Esta sinergia convierte el estudio de las matemáticas en un proceso más estructurado, motivador y adaptado a las necesidades individuales.

## Justificación

La enseñanza de las matemáticas enfrenta desafíos como la desmotivación ante contenidos percibidos como abstractos, brechas de aprendizaje en un mismo grupo y limitaciones para personalizar la enseñanza en tiempo real. La IA (en especial la IAGen) responde a estos retos al posibilitar: (i) entornos de aprendizaje interactivos; (ii) generación de ejemplos y ejercicios adaptados al contexto del estudiante; (iii) apoyo al docente en clases innovadoras; y (iv) visualizaciones inmediatas que refuercen la comprensión conceptual. Esta propuesta aprovecha la convergencia entre pedagogía, matemáticas y tecnología para brindar experiencias significativas con fuerte componente de innovación y accesibilidad.

## Objetivos

### Objetivo general

Diseñar e implementar un modelo de enseñanza de las matemáticas que integre inteligencia artificial generativa como apoyo al aprendizaje de conceptos fundamentales, fortaleciendo la comprensión, la motivación y el pensamiento crítico.

### Objetivos específicos

- Presentar contenidos básicos de lógica matemática, teoría de conjuntos y métodos de demostración apoyados por recursos de IA.

- Desarrollar actividades interactivas con conjuntos numéricos naturales, enteros y racionales como primeras experiencias prácticas de IAGen en clase.
- Recomendar software educativo y herramientas que complementen la enseñanza tradicional.
- Promover la participación activa mediante ejercicios, simulaciones y actividades personalizadas generadas con IA.

## Marco conceptual

- **Lógica matemática:** base del pensamiento formal y de la construcción de argumentos rigurosos.
- **Teoría de conjuntos:** lenguaje universal de las matemáticas que sustenta la organización del conocimiento.
- **Métodos de demostración:** estrategias para validar enunciados y fortalecer la argumentación.
- **Conjuntos numéricos:** punto de partida para la aritmética y el álgebra (naturales, enteros, racionales).
- **Inteligencia artificial generativa (IAGen):** tecnología que produce contenido nuevo (texto, gráficos, simulaciones) a partir de indicaciones, y que, aplicada a la educación matemática, personaliza y enriquece la experiencia de aprendizaje.

La propuesta articula fundamentos clásicos de las matemáticas con oportunidades de las tecnologías emergentes. No busca reemplazar al docente, sino potenciar su rol, haciendo el aprendizaje más cercano, dinámico y eficaz.

## Al finalizar...

El estudiante será capaz de:

- Utilizar expresiones lógicas para llegar a conclusiones matemáticas.
- Definir conjuntos por extensión y comprensión.
- Utilizar diferentes métodos para demostrar proposiciones.
- Utilizar la IA como acompañante en el aprendizaje.
- Diferenciar los diferentes conjuntos numéricos.

# LÓGICA MATEMÁTICA

Una **proposición lógica** es un enunciado del que se puede decir que es verdadero (V) o falso (F), pero no las dos cosas a la vez.

## Notación y valor de verdad

Las proposiciones se representan con letras minúsculas como  $p, q, r, s, \dots$ .

- $p$ : 2 es un número entero (V).
- $q$ :  $3 \times 2 = 2 \times 3$  (V).
- $r$ :  $A \subset A \cup \bar{B}$  (V).
- $s$ :  $1 + 1 = 11$  (F).

La veracidad (V) o falsedad (F) de una proposición es su **valor de verdad**. Se puede representar como 1 (Verdadero) y 0 (Falso).

## Conectores lógicos

Permiten unir dos o más proposiciones simples para formar **proposiciones compuestas**.

Cuadro 1: Principales Conectores lógicos

Nombre	Símbolo	Notación	Lectura
Conjunción	$\wedge$	$p \wedge q$	"p y q"
Disyunción	$\vee$	$p \vee q$	"p o q"
Negación	$\sim$	$\sim p$	"No p"
Condicional	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$	"Si p, entonces q"
Bicondicional	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$	"p si y solo si q"

## Tablas de verdad

Muestran los valores de verdad de las proposiciones compuestas. El número de filas de la tabla es  $2^n$ , donde  $n$  es el número de proposiciones simples. Por ejemplo, para 2 proposiciones,  $2^2 = 4$  filas.

Cuadro 2: Tablas para Conjunción, Disyunción y Negación

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim p$
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

## Jerarquía de operadores lógicos

1. Paréntesis: ( )
2. Negación:  $\sim$
3. Conjunción:  $\wedge$
4. Disyunción:  $\vee$
5. Condicional:  $\rightarrow$
6. Bicondicional:  $\leftrightarrow$

## Tablas de verdad para condicional y bicondicional

Cuadro 3: Implicación y Equivalencia

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

## Clasificación de proposiciones compuestas

- **Tautología:** Proposición que es verdadera para todos los posibles valores de verdad de sus variables.
- **Contradicción (Falacia):** Proposición que es falsa para todos los posibles valores de verdad.
- **Contingencia:** Proposición que toma valores tanto verdaderos como falsos.

### Ejemplos:

$$\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

$p$	$q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	Todo
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Podemos observar cómo:  $\sim (p \vee q)$  y  $\sim p \wedge \sim q$  son equivalentes, a esto se le conoce como la segunda ley de Morgan

$$\sim p \wedge [\sim q \vee (p \rightarrow q)]$$

$p$	$q$	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim q \vee (p \rightarrow q)$	Todo
V	V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V

$$[(p \rightarrow q) \vee (\sim q \wedge r)] \leftrightarrow (r \rightarrow q)$$

$p$	$q$	$r$	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \rightarrow q) \vee (\sim q \wedge r)$	$r \rightarrow q$	Todo
V	V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	V	V	V

### Ejemplo

Sean:

$p$ : El número es divisible por 2.

$q$ : El número es divisible por 3.

$r$ : El número es divisible por 5.

### Expresión lógica

$$(p \vee q) \rightarrow (\sim r \wedge q)$$

Esto se lee como: “Si el número es divisible por 2 o por 3, entonces no es divisible por 5 y es divisible por 3”.

## Tabla de verdad

$p$	$q$	$r$	$p \vee q$	$\sim r \wedge q$	$(p \vee q) \rightarrow (\sim r \wedge q)$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V

## Explicación de la tabla

1.  $\sim r$ : Se invierte el valor de  $r$ .
2.  $p \vee q$  (Disyunción: “O”): Es V si al menos una de  $p$  o  $q$  es verdadera.
3.  $\sim r \wedge q$  (Conjunción: “Y”): Es V solo cuando  $\sim r$  y  $q$  son ambos verdaderos.
4.  $(p \vee q) \rightarrow (\sim r \wedge q)$  (Condicional): Solo es Falso cuando el antecedente  $(p \vee q)$  es V y el consecuente  $(\sim r \wedge q)$  es F.

## Interpretación

Esta lógica puede aplicarse a problemas matemáticos. Por ejemplo, si un número es divisible por 2 o por 3, entonces para que la afirmación sea verdadera, debe no ser divisible por 5 y ser divisible por 3.

### Casos específicos

- $n = 2$ :  $p = V, q = F, r = F \Rightarrow$  La proposición es **Falsa**.
- $n = 3$ :  $p = F, q = V, r = F \Rightarrow$  La proposición es **Verdadera**.
- $n = 5$ :  $p = F, q = F, r = V \Rightarrow$  La proposición es **Verdadera**.

## Ejemplo 2

Sean:

$p$ : "El número es par".

$q$ : "El número es múltiplo de 3".

$r$ : "El número es mayor que 10".

La expresión lógica es:

$$(p \vee q) \leftrightarrow (\sim r \vee (p \wedge q))$$

Esto se lee como: "El número es par o múltiplo de 3 si y solo si no es mayor que 10 o es par y múltiplo de 3."

## Tabla de verdad

$p$	$q$	$r$	$p \vee q$	$\sim r$	$p \wedge q$	$\sim r \vee (p \wedge q)$	$(p \vee q) \leftrightarrow (\sim r \vee (p \wedge q))$
V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	V	F	V	F

## Explicación de la tabla

1.  $\sim r$ : Se invierte el valor de  $r$ .
2.  $p \vee q$ : Se cumple si el número es par o múltiplo de 3.
3.  $p \wedge q$ : Se cumple si el número es par y múltiplo de 3.
4.  $\sim r \vee (p \wedge q)$ : Se cumple si el número no es mayor que 10 o si es par y múltiplo de 3 al mismo tiempo.
5.  $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim r \vee (p \wedge q))$ : La bicondicional es verdadera solo cuando ambos lados de la ecuación tienen el mismo valor.

## Comprobación

La expresión nos dice que un número será par o múltiplo de 3 si y solo si no es mayor que 10 o es par y múltiplo de 3 al mismo tiempo.

- **12** ( $p = V, q = V, r = V$ ): Cumple la ecuación.
- **6** ( $p = V, q = V, r = F$ ): También la cumple.
- **8** ( $p = V, q = F, r = V$ ): No la cumple.

### Ejemplo 3

Sean:

$p$ : "El número es múltiplo de 4".

$q$ : "El número es múltiplo de 5".

$r$ : "El número es mayor que 20".

La expresión lógica es:

$$(p \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge (p \vee q))$$

Interpretación: "Si el número es múltiplo de 4 o no es múltiplo de 5, entonces es mayor que 20 y además es múltiplo de 4 o de 5."

### Tabla de verdad

$p$	$q$	$r$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$p \vee q$	$r \wedge (p \vee q)$	$(p \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge (p \vee q))$
V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	F	F	F

### Explicación de cada columna

1.  $\sim q$ : Se invierte el valor de  $q$ .
2.  $p \vee \sim q$ : Se cumple si el número es múltiplo de 4 o no es múltiplo de 5.
3.  $p \vee q$ : Se cumple si el número es múltiplo de 4 o de 5.
4.  $r \wedge (p \vee q)$ : Se cumple si el número es mayor que 20 y, además, es múltiplo de 4 o 5.
5.  $(p \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge (p \vee q))$ : Solo es falso cuando el antecedente  $(p \vee \sim q)$  es verdadero y el consecuente  $(r \wedge (p \vee q))$  es falso.

### Interpretación

Ejemplos prácticos:

- **24** ( $p = V, q = F, r = V$ ): Cumple la ecuación.
- **16** ( $p = V, q = F, r = F$ ): No la cumple.
- **25** ( $p = F, q = V, r = F$ ): No la cumple.

## Leyes de De Morgan

Establecen una forma de transformar expresiones lógicas que contienen negaciones de conjunciones y disyunciones.

- **Primera Ley:**  $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
- **Segunda Ley:**  $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

### Demostración de la primera ley de De Morgan

Cuadro 4: Demostración de  $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	<b>F</b>	F	F	<b>F</b>
V	F	F	<b>V</b>	F	V	<b>V</b>
F	V	F	<b>V</b>	V	F	<b>V</b>
F	F	F	<b>V</b>	V	V	<b>V</b>

### Ejercicios propuestos

1. Construya la tabla de verdad de la fórmula  $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim r \vee p)] \rightarrow (q \vee r)$  y determine si es una tautología, contradicción o contingencia. Justifique su respuesta brevemente.
2. Demuestre utilizando equivalencias lógicas que  $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ . Indique las leyes aplicadas en cada paso (por ejemplo: contraposición, De Morgan, doble negación, etc.).
3. Considere el enunciado: “Para todo número real  $x$ , si  $x^2 \geq 1$  entonces  $x \leq -1$  o  $x \geq 1$ ”. Expresé el enunciado en lógica con cuantificadores, escriba su negación formal y muestre un contraejemplo (si existe) o justifique por qué es verdadero.

# Teoría de conjuntos

## 1. Introducción a los conjuntos

Un conjunto es una colección bien definida de objetos, llamados **elementos**. La característica principal es que debe estar claro cuáles objetos pertenecen o no al conjunto.

- Se representan con letras mayúsculas:  $A, B, C$ .
- Los elementos se escriben entre llaves:  $A = \{1, 2, 3\}$ .
- Pertenencia: si un elemento  $x$  está en  $A$ , se escribe  $x \in A$ ; si no pertenece,  $x \notin A$ .

**Ejemplos:**

- $B = \{\text{lunes, martes, miércoles}\}$ .
- $C = \{2, 4, 6, 8\}$ .

## Formas de representación

Existen dos formas principales de representar conjuntos:

### Por extensión

Se enumeran todos los elementos:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

### Por comprensión

Se indica una propiedad que cumplen sus elementos:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es impar y } x < 10\}.$$

## Conjuntos especiales

- Conjunto vacío:  $\emptyset$ .
- Conjunto universal: contiene todos los elementos posibles en un contexto.

## Relaciones entre conjuntos

### Relación de pertenencia

Ejemplo: sea  $A = \{8, 10, 12, 14, 16\}$ .

$$8 \in A, \quad 5 \notin A.$$

### Subconjuntos

Un conjunto  $M$  es subconjunto de  $Q$  si todos sus elementos están en  $Q$ .

$$M \subset Q.$$

Ejemplo:  $\{2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

### Conjunto de partes (potencia)

Es el conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto  $T$ .

$$\mathcal{P}(T).$$

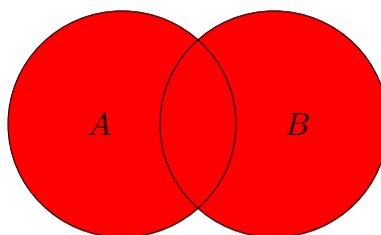
Ejemplo: Si  $T = \{1, 2, 3\}$ , entonces

$$\mathcal{P}(T) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

## Operaciones entre conjuntos

### Unión

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$



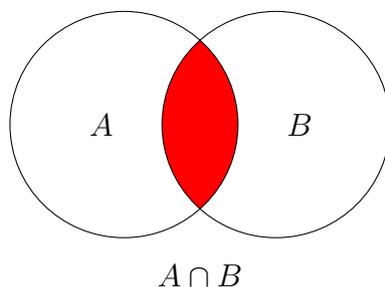
$$A \cup B$$

**Ejemplo:** Si  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y  $B = \{3, 4, 6, 8, 9\}$ , entonces:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}.$$

## Intersección

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

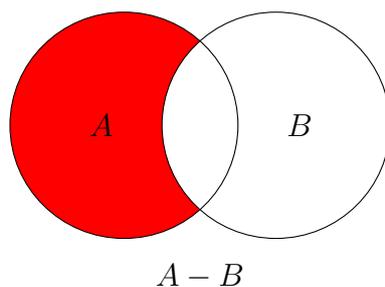


**Ejemplo:**

$$A \cap B = \{3, 4\}.$$

## Diferencia

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$



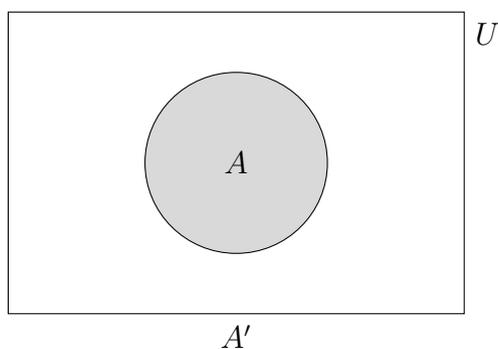
**Ejemplo:**

$$\{1, 2, 3\} - \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}.$$

## Complemento

Dado un universo  $U$ , el complemento de  $A$  es:

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$



**Ejemplo:** Si  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y  $A = \{1, 2, 3\}$ , entonces:

$$A' = \{4, 5, 6\}.$$

## Conjuntos numéricos

- $\mathbb{N}$ : naturales =  $\{1, 2, 3, \dots\}$ .
- $\mathbb{Z}$ : enteros =  $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .
- $\mathbb{Q}$ : racionales =  $\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ .
- $\mathbb{R}$ : reales.
- $\mathbb{C}$ : complejos.

## Ejemplos ilustrativos

1. Si  $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ :

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

2. Si  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$ :

$$A' = \{4, 5, 6\}.$$

## Ejercicios propuestos

1. Escribe por extensión el conjunto  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$ .
2. Determina el conjunto de las vocales del alfabeto.
3. Sea  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6\}$ :
  - a)  $A \cup B$ ,
  - b)  $A \cap B$ ,
  - c)  $A - B$ ,
  - d)  $B - A$ .
4. Dibuja el diagrama de Venn de dos conjuntos que se intersecten en dos elementos.
5. Escribe dos conjuntos infinitos y dos finitos.
6. Determina si  $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, d\}$ .
7. Identifica los números racionales en el conjunto  $\{2, \pi, 3/4, -1, \sqrt{2}\}$ .
8. Escribe un ejemplo de conjunto definido por comprensión.
9. Sea  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $A = \{2, 4, 6, 8\}$ . Encuentra  $A'$ .
10. Representa gráficamente con un diagrama de Venn:  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4\}$ ,  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

## Respuestas

1.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
2.  $\{a, e, i, o, u\}$ .
3. a)  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , b)  $\{3, 4\}$ , c)  $\{1, 2\}$ , d)  $\{5, 6\}$ .
4. (Dibujo de dos círculos intersectando en dos puntos).
5. Infinitos:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ . Finitos:  $\{1, 2, 3\}, \{\text{lunes, martes}\}$ .
6. Sí, porque todos los elementos de  $\{a, b\}$  están en  $\{a, b, c, d\}$ .
7. Racionales:  $2, \frac{3}{4}, -1$ .
8. Ejemplo:  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es múltiplo de } 5\}$ .
9.  $A' = \{1, 3, 5, 7\}$ .
10. (Gráfico con  $U, A, B$  mostrando intersección y unión).

# MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

## Introducción

Los métodos de demostración en matemáticas son herramientas lógicas utilizadas para validar la veracidad de afirmaciones o teoremas. A través de estos métodos, se construyen argumentos rigurosos basados en definiciones, axiomas y resultados previamente aceptados. Entre los más comunes se encuentran la demostración directa, la contrarrecíproca, la contradicción y la inducción matemática. Cada uno se aplica según el tipo de proposición que se desea probar. Son fundamentales para asegurar la solidez del razonamiento matemático.

## 1. Proposiciones abiertas

### Definición de proposición abierta

Una proposición abierta es una expresión matemática que contiene una o más variables y cuya validez depende de los valores que asuman esas variables. Es decir, no tiene un valor de verdad determinado hasta que se especifiquen los valores para las variables involucradas.

**Ejemplo:** La proposición: " $x + 3 = 5$ " es abierta, ya que su veracidad depende del valor de  $x$ . Si  $x = 2$ , la proposición es verdadera, pero si  $x = 1$ , la proposición es falsa.

### Proposiciones abiertas equivalentes:

Una proposición abierta equivalente es aquella que, al cambiar el valor de las variables, produce la misma verdad para todas las posibles asignaciones de esos valores, es decir, ambas proposiciones tienen el mismo conjunto de soluciones.

**Ejemplo:** Si tenemos las proposiciones abiertas:

$$x + 3 = 5$$

$$x = 2$$

Ambas son equivalentes porque, para que la primera proposición sea verdadera,  $x$  debe ser igual a 2, lo cual también satisface la segunda proposición. Por lo tanto, ambas son válidas bajo las mismas condiciones.

## Negación de proposiciones abiertas:

La negación de una proposición abierta consiste en transformar la proposición de manera que se afirme que no es verdadera para ciertos valores de las variables. Si una proposición abierta  $P(x)$  es verdadera para algún valor de  $x$ , su negación será falsa para ese mismo valor, y viceversa.

**Ejemplo:** si tenemos la proposición abierta  $x + 3 = 5$ , su negación sería  $x + 3 \neq 5$ , que es verdadera cuando  $x \neq 2$  y falsa cuando  $x = 2$ .

En pocas palabras, la negación cambia el sentido de la proposición, afirmando que la condición no se cumple para ciertos valores de la variable.

## 2. Implicaciones y estructura de los teoremas en Matemáticas

Un teorema en matemáticas es una afirmación que se puede demostrar como verdadera a partir de axiomas, definiciones y teoremas previamente establecidos.

La estructura de los teoremas sigue un formato estándar, donde se suele utilizar la forma de implicación lógica.

### Implicación en matemáticas

La implicación, representada por el símbolo  $\rightarrow$ , es una relación lógica que establece que si una proposición  $P$  es verdadera, entonces otra proposición  $Q$  también lo será. Se escribe como:

$$P \rightarrow Q$$

Esto se lee como "Si  $P$ , entonces  $Q$ ". En términos de un teorema, la afirmación "Si  $P$  es verdadera, entonces  $Q$  también lo es", es el corazón de la estructura del teorema.

Por ejemplo, un teorema típico podría ser:

**Teorema 1** *Si un número es par, entonces es divisible por 2.*

La proposición sería:

Si  $x$  es par, entonces  $x$  es divisible por 2.

Esto se traduce en la implicación lógica:

$$P(x) : x \text{ es par} \rightarrow Q(x) : x \text{ es divisible por 2.}$$

## Cuantificación universal

En matemáticas, cuando trabajamos con proposiciones que involucran variables, a menudo usamos cuantificadores para indicar el alcance de la proposición. El cuantificador universal  $\forall$  se utiliza para afirmar que una proposición es válida para todos los elementos de un conjunto dado.

$$\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$$

Esto se lee como "Para todo  $x$  en el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$ ,  $P(x)$  es verdadero."

Un ejemplo común de un teorema que usa el cuantificador universal es el siguiente:

**Teorema 2** *Para todo número entero  $n$ , si  $n$  es divisible por 4, entonces  $n$  es divisible por 2.*

Esto se puede escribir formalmente como:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (n \text{ divisible por } 4) \rightarrow (n \text{ divisible por } 2).$$

La expresión  $\forall n \in \mathbb{Z}$  denota que la afirmación debe ser válida para todos los números enteros  $n$ .

## Estructura de un teorema

Los teoremas en matemáticas suelen estar compuestos por varias partes clave:

- **Hipótesis:** La proposición o conjunto de condiciones bajo las cuales se demuestra algo.
- **Conclusión:** Lo que se quiere demostrar bajo las condiciones de la hipótesis.
- **Demostración:** La secuencia lógica de pasos que lleva de la hipótesis a la conclusión.

**Teorema 3** *Si  $a$  y  $b$  son números enteros, entonces  $a + b = b + a$ .*

- **Hipótesis:**  $a, b \in \mathbb{Z}$  (son enteros).
- **Conclusión:**  $a + b = b + a$ .
- **Demostración:** La propiedad de conmutatividad de la suma en los números enteros establece que, para cualquier par de enteros  $a$  y  $b$ , siempre se cumple que  $a + b = b + a$ .

## Ejemplo con implicación y cuantificación universal

Consideremos el siguiente ejemplo que involucra tanto cuantificación universal como una implicación:

**Teorema 4** *Para todo número real  $x$ , si  $x > 0$ , entonces  $x^2 > 0$ .*

Formalmente se expresa como:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x > 0) \rightarrow (x^2 > 0).$$

Este teorema establece que para todos los números reales  $x$ , si  $x$  es mayor que cero, entonces su cuadrado también será mayor que cero. La demostración de este teorema es directa, ya que el cuadrado de un número positivo siempre es positivo.

## 3. Implicaciones derivadas

Las implicaciones derivadas nos permiten obtener diferentes versiones de una implicación lógica original. A continuación, se detallan tres tipos comunes de implicaciones derivadas: la **recíproca**, la **contraria** y la **contrarrecíproca**.

### Recíproca

La **recíproca** de una implicación  $P \rightarrow Q$  es la afirmación  $Q \rightarrow P$ . Es decir, invertimos el sentido de la implicación. Sin embargo, la recíproca no siempre es cierta, incluso si la implicación original lo es.

**Ejemplo 1** *Si  $x > 0 \rightarrow x^2 > 0$ , la recíproca sería:*

$$x^2 > 0 \rightarrow x > 0.$$

*Aunque la afirmación original es verdadera, la recíproca no lo es necesariamente, ya que  $x = -2$  también cumple  $x^2 > 0$ , pero no  $x > 0$ .*

### Contraria

La **contraria** de una implicación  $P \rightarrow Q$  es la implicación  $\sim P \rightarrow \sim Q$ , es decir, se niegan ambas partes de la proposición original. Sin embargo, la contraria no siempre es equivalente a la implicación original y no garantiza su veracidad.

**Ejemplo 2** *Si  $x > 0 \rightarrow x^2 > 0$ , la contraria sería:*

$$x \leq 0 \rightarrow x^2 \leq 0.$$

*Esta contraria no siempre es útil, ya que  $x^2$  es siempre mayor o igual a 0 para cualquier valor de  $x$ .*

## Contrarrecíproca

La **contrarrecíproca** de una implicación  $P \rightarrow Q$  es la implicación  $\sim Q \rightarrow \sim P$ .

Esta es siempre equivalente a la implicación original. Si  $P \rightarrow Q$  es verdadera, entonces  $\sim Q \rightarrow \sim P$  también será verdadera.

**Ejemplo 3** Si  $x > 0 \rightarrow x^2 > 0$ , la *contrarrecíproca* sería:

$$x^2 \leq 0 \rightarrow x \leq 0.$$

*Esta contrarrecíproca es equivalente a la implicación original y es siempre verdadera.*

## 4. Métodos de demostración

En matemáticas, la **demostración** es el proceso de mostrar que una proposición o teorema es verdadero. Existen diversos métodos de demostración, los cuales se aplican dependiendo del tipo de problema y las herramientas disponibles. A continuación se detallan los principales métodos de demostración.

### 4.1. Demostración directa

La **demostración directa** es uno de los métodos más comunes. Consiste en partir de hipótesis conocidas o axiomas y aplicar reglas lógicas y definiciones para llegar a la conclusión deseada.

**Paso a paso de una demostración directa:**

1. Establecer la proposición o teorema que se desea demostrar.
2. Usar las hipótesis o premisas del teorema.
3. Aplicar definiciones, propiedades y reglas de inferencia para llegar a la conclusión.

**Ejemplo 4** *Demostrar que la suma de dos números pares es par.*

**Demostración:** *Supongamos que  $a$  y  $b$  son números pares. Entonces, por definición, existen enteros  $m$  y  $n$  tales que:*

$$a = 2m \quad \text{y} \quad b = 2n.$$

*La suma de  $a$  y  $b$  es:*

$$a + b = 2m + 2n = 2(m + n).$$

*Como  $m + n$  es un número entero,  $a + b$  es múltiplo de 2, lo que implica que  $a + b$  es un número par. Por lo tanto, hemos demostrado que la suma de dos números pares es par.*

**Ejercicios utilizando IA generativa.** Utilizando una herramienta de inteligencia artificial generativa, ejecute los siguientes prompts y estudie sus resultados:

1. Demuestra directamente que  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .
2. Demuestra directamente que  $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
3. Demuestra directamente que  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .
4. Demuestra directamente que  $(A \cup B)' = A' \cap B'$  (ley de De Morgan).
5. Demuestra directamente que  $A \subseteq A \cup B$ .

## 4.2. Demostración indirecta

La **demostración indirecta** consiste en demostrar la validez de una proposición mediante el uso de argumentos indirectos, como la contradicción o el contrarrecíproco.

### Encontrar una contradicción

La **demostración por contradicción** parte de suponer que la proposición que queremos demostrar es falsa, y luego se demuestra que esto lleva a una contradicción, lo que implica que la proposición original debe ser verdadera.

**Ejemplo 5** *Demostrar que  $\sqrt{2}$  es irracional.*

**Demostración:** *Supongamos que  $\sqrt{2}$  es racional, es decir, que se puede escribir como una fracción:*

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

*donde  $p$  y  $q$  son enteros coprimos (su máximo común divisor es 1). Al elevar ambos lados al cuadrado:*

$$2 = \frac{p^2}{q^2},$$

*lo que implica que  $p^2 = 2q^2$ . Esto significa que  $p^2$  es un número par, por lo que  $p$  también debe ser par. Escribimos  $p = 2k$  para algún entero  $k$ , y sustituimos:*

$$(2k)^2 = 2q^2 \quad \rightarrow \quad 4k^2 = 2q^2 \quad \rightarrow \quad 2k^2 = q^2.$$

*De aquí concluimos que  $q^2$  es par, lo que implica que  $q$  también es par. Sin embargo, esto contradice nuestra suposición de que  $p$  y  $q$  son coprimos, porque ambos son divisibles por 2. Por lo tanto, nuestra suposición es falsa, y  $\sqrt{2}$  es irracional.*

**Ejercicios utilizando IA generativa.** Utilizando una herramienta de inteligencia artificial generativa, ejecute los siguientes prompts y estudie sus resultados:

1. Demuestra por contradicción que si  $A \subseteq B$ , entonces  $A \cap B' = \emptyset$ .
2. Demuestra por contradicción que si  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $A \subseteq B'$ .
3. Demuestra por contradicción que  $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$ .

### Uso del contrarrecíproco

La **demostración por contrarrecíproco** se basa en la equivalencia lógica entre una proposición y su contrarrecíproca. Es decir,  $P \rightarrow Q$  es equivalente a  $\sim Q \rightarrow \sim P$ . Si demostramos la contrarrecíproca, estamos demostrando la proposición original.

**Ejemplo 6** *Demostrar que si  $n$  es impar, entonces  $n^2$  es impar.*

**Demostración:** *La contrarrecíproca de esta afirmación es: "Si  $n^2$  no es impar, entonces  $n$  no es impar". Es decir, si  $n^2$  es par, entonces  $n$  es par. Supongamos que  $n^2$  es par. Esto implica que  $n$  es par (porque el cuadrado de un número impar es impar). Por lo tanto, hemos demostrado la contrarrecíproca, lo que implica que la afirmación original también es cierta.*

**Ejercicios utilizando IA generativa.** Utilizando una herramienta de inteligencia artificial generativa, ejecute los siguientes prompts y estudie sus resultados:

1. Demuestra por contrarrecíproco que si  $A \subseteq B$ , entonces  $x \notin B \rightarrow x \notin A$ .
2. Demuestra por contrarrecíproco que si  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $x \in A \rightarrow x \notin B$ .
3. Demuestra por contrarrecíproco que si  $x \in A \setminus B$ , entonces  $x \notin B$ .

### 4.3. Métodos de refutación

En algunos casos, se busca refutar una proposición demostrando que no puede ser verdadera.

#### Refutación por contradicción

La **refutación por contradicción** es similar a la demostración por contradicción, pero en lugar de probar la validez de una proposición, buscamos mostrar que una proposición es falsa.

**Ejemplo 7** *Refutar que todos los números primos son impares.*

**Refutación:** *El número 2 es un número primo, pero no es impar. Por lo tanto, la proposición "todos los números primos son impares" es falsa.*

**Ejercicios utilizando IA generativa.** Utilizando una herramienta de inteligencia artificial generativa, ejecute los siguientes prompts y estudie sus resultados:

1. Refuta por contradicción la afirmación: "Si  $A \subseteq B$ , entonces  $B \subseteq A$ ".
2. Refuta por contradicción la afirmación: " $A \cup B = A$  implica que  $B = A$ ".
3. Refuta por contradicción la afirmación: "Si  $A \cap B = A$ , entonces  $A = B$ ".

### Refutación por contraejemplo

Otra técnica de refutación consiste en usar un **contraejemplo**, es decir, un solo caso que demuestre que la proposición es falsa.

**Ejemplo 8** Refutar que todos los números naturales son divisibles por 3.

**Refutación:** El número 1 es un número natural, pero no es divisible por 3. Por lo tanto, la proposición "todos los números naturales son divisibles por 3." es falsa.

**Ejercicios utilizando IA generativa.** Utilizando una herramienta de inteligencia artificial generativa, ejecute los siguientes prompts y estudie sus resultados:

1. Refuta por contraejemplo la afirmación: "Para todos los conjuntos  $A$  y  $B$ , se cumple  $A \subseteq B$  si y solo si  $B \subseteq A$ ".
2. Refuta por contraejemplo la afirmación: "Si  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $A = \emptyset$  o  $B = \emptyset$ ".
3. Refuta por contraejemplo la afirmación: "Si  $A \subseteq C$  y  $B \subseteq C$ , entonces  $A \cup B = C$ ".

### 4.4. Inducción matemática

La **inducción matemática** es un método poderoso para demostrar proposiciones que son válidas para todos los números naturales o enteros. Se compone de dos pasos:

1. **Base de inducción:** Demostrar que la proposición es verdadera para el primer valor, generalmente  $n = 1$ .
2. **Paso inductivo:** Suponer que la proposición es verdadera para  $n = k$ , y luego demostrar que es verdadera para  $n = k + 1$ .

**Ejemplo 9** Demostrar que la suma de los primeros  $n$  números naturales es:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Base de inducción:** Para  $n = 1$ , tenemos:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1,$$

lo cual es cierto.

**Paso inductivo:** Supongamos que la proposición es verdadera para  $n = k$ , es decir:

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Queremos demostrar que la proposición es verdadera para  $n = k + 1$ , es decir, que:

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Usando la hipótesis inductiva:

$$1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que la proposición es verdadera para  $n = k + 1$ . Por inducción, la fórmula es válida para todos los  $n \in \mathbb{N}$ .

**Ejercicios utilizando IA generativa.** Utilizando una herramienta de inteligencia artificial generativa, ejecute los siguientes prompts y estudie sus resultados:

1. Demuestra por inducción que  $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Demuestra por inducción que  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Demuestra por inducción que si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son disjuntos dos a dos, entonces:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

4. Demuestra por inducción que  $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
5. Demuestra por inducción que un conjunto de  $n$  elementos tiene  $2^n$  subconjuntos.

# ELABORACIÓN DE PROMPTS

## 1 Introducción a ChatGPT

### 1.1 ¿Que es ChatGPT?

ChatGPT es un modelo de lenguaje avanzado desarrollado por OpenAI, basado en la arquitectura GPT (Generative Pre-trained Transformer). Este modelo ha sido entrenado utilizando grandes cantidades de datos textuales y es capaz de generar respuestas coherentes, contextualizadas y relevantes a partir de una entrada de texto, conocida como "prompt".

Enlace : <https://chatgpt.com>

### 1.2 Potencial y aplicaciones de ChatGPT

ChatGPT tiene una amplia gama de aplicaciones que abarca desde la escritura creativa y el aprendizaje automático hasta la generación de código y la resolución de problemas.

Algunos de sus usos más comunes incluyen:

- **Soporte técnico y atención al cliente:** ChatGPT puede responder preguntas frecuentes, guiar en la solución de problemas o realizar recomendaciones.
- **Asistente de escritura:** Generación de contenido escrito, desde ensayos, historias, correos electrónicos, hasta la corrección gramatical y la mejora de estilo.
- **Generación de código:** Asistencia a programadores al generar fragmentos de código en diversos lenguajes de programación y resolver errores de código.
- **Educación:** Ayuda a los estudiantes en la comprensión de conceptos difíciles, creación de materiales educativos, o como tutor interactivo.
- **Investigación y análisis:** Búsqueda de información, resúmenes de textos largos, o desarrollo de ideas a partir de información compleja.

- **Asistente de brainstorming:** Ayuda a generar ideas creativas para proyectos de diseño, marketing o escritura.

El poder de ChatGPT radica en su capacidad para adaptarse a diferentes tareas a través de simples comandos de texto, lo que permite a los usuarios interactuar con él de manera intuitiva y rápida.

### 1.3 Diferencias entre versiones de ChatGPT

A lo largo del tiempo, OpenAI ha lanzado varias versiones del modelo GPT, cada una con mejoras significativas en cuanto a su capacidad de generar texto más coherente y relevante. Entre las versiones más populares se encuentran GPT-3.5 y GPT-4, las cuales ofrecen diferencias notables:

- **GPT-3.5:** GPT-3.5 es excelente para tareas generales como generar texto, asistencia básica en programación y consulta de información. Aunque tiende a ser menos precisa en tareas que requieren razonamiento complejo o respuestas altamente especializadas.
- **GPT-4:** Representa una mejora significativa de GPT-3.5. GPT-4 es ideal para trabajos que requieren un alto nivel de razonamiento, incluyendo programación avanzada, análisis en profundidad y generación de contenido más matizado.

## 2 Cómo interactuar eficazmente con ChatGPT

Para obtener el máximo provecho de ChatGPT, es esencial saber cómo formular los prompts de manera adecuada. Una buena interacción depende de la claridad y precisión con que los usuarios describan sus necesidades.

### 2.1 Buenas prácticas para escribir prompts

Un prompt bien estructurado es clave para obtener respuestas útiles y relevantes. Aquí hay algunas recomendaciones básicas:

- **Sé claro y específico:** Mientras más detallado sea el prompt, mejor será la respuesta de ChatGPT. Por ejemplo, en lugar de preguntar "¿Qué es Python?", es preferible algo como "¿Qué es Python y cuáles son sus principales características como lenguaje de programación?"
- **Contexto adecuado:** Proporcionar contexto adicional puede ayudar a que ChatGPT entienda mejor la situación. Asegúrate de incluir detalles relacionados para que la respuesta se ajuste a lo que necesitas.
- **Lenguaje natural:** Utiliza lenguaje natural para interactuar, tal como lo harías en una conversación con una persona.

## 2.2 Técnicas para obtener respuestas más precisas

Puedes usar técnicas específicas en los prompts para guiar mejor la respuesta de ChatGPT:

- **Dividir la tarea en pasos:** En lugar de hacer una sola pregunta compleja, divídela en pasos más pequeños. Por ejemplo, si estás investigando cómo funciona un algoritmo, podrías pedir primero una descripción general y luego profundizar en aspectos más específicos.

## 2.3 Cómo refinar y ajustar respuestas:

Si la respuesta de ChatGPT no es la esperada, puedes refinar el prompt para mejorar la salida. Aquí hay algunas estrategias:

- **Reformular preguntas:** Si la respuesta no es precisa, intenta reformular la pregunta. A veces, pequeños cambios en la forma en que preguntas pueden producir respuestas más adecuadas.  
Ejemplo:
  - En lugar de "Dime sobre inteligencia artificial", puedes preguntar "¿Cuáles son las principales áreas de investigación en inteligencia artificial?"
- **Añadir más detalles:** Si el primer intento fue demasiado general, añade más detalles al prompt para obtener una respuesta más enfocada.  
Ejemplo:
  - "Explícame la inteligencia artificial enfocándote en el aprendizaje profundo y el procesamiento de lenguaje natural."

## 3 Uso avanzado de prompts

En este punto, abordaremos cómo escribir prompts más elaborados, encadenar respuestas y cómo utilizar ejemplos para guiar el comportamiento del modelo.

### 3.1 Prompts complejos y encadenados

Cuando se trata de obtener respuestas más detalladas o realizar tareas más avanzadas, a menudo es útil encadenar varios prompts o hacer preguntas en secuencia. Esta técnica te permite guiar a ChatGPT a lo largo de un proceso de pensamiento más profundo y detallado.

- **Prompts encadenados:** Consisten en dividir una tarea o pregunta en varios pasos, solicitando información adicional en cada uno. En lugar de hacer una pregunta única y compleja, desglósala en preguntas más sencillas que vayan guiando la interacción, como si de una conversación se tratara.  
Ejemplo:

- **Paso 1:** "Explícame los principios básicos de la programación orientada a objetos."

**Paso 2:** "Ahora, compárala con la programación funcional."

**Paso 3:** "Dame ejemplos de situaciones donde sería mejor usar programación orientada a objetos."

- **Usuario:** "Explícame la diferencia entre inteligencia artificial y aprendizaje automático."

**ChatGPT:** (Responde)

**Usuario:** "¿Y cómo el aprendizaje profundo se relaciona con el aprendizaje automático?"

Este enfoque es especialmente útil para temas que requieren varias etapas de análisis o cuando necesitas explorar una idea de manera progresiva.

### 3.2 Prompts condicionados (uso de reglas dentro de un prompt)

Los prompts pueden contener condiciones o restricciones que guían a ChatGPT para producir resultados específicos. Estas condiciones ayudan a obtener respuestas que siguen un formato o conjunto de reglas predeterminadas.

- **Condicionar el estilo de la respuesta o el formato:** Puedes pedir a ChatGPT que escriba en un estilo específico o con un enfoque determinado. Esto es útil cuando necesitas respuestas en distintos tonos o formatos, como un estilo formal, casual, técnico o creativo; o si necesitas una estructura específica.

Ejemplos:

- "Explica el concepto de polimorfismo en Python como si fueras un profesor universitario dando una clase introductoria."
- "Genera una lista de ventajas y desventajas de utilizar la nube para almacenamiento de datos, limitándote a 3 puntos por categoría."

### 3.3 Uso de ejemplos dentro de prompts para guiar la respuesta

Incluir ejemplos en tus prompts es una técnica poderosa que permite guiar a ChatGPT en la generación de una respuesta similar al formato del ejemplo proporcionado. Esto es especialmente útil cuando necesitas una salida estructurada o un resultado muy específico.

- **Uso de ejemplos para guiar la estructura:** Puedes proporcionar un ejemplo de formato para que ChatGPT lo siga.

Ejemplo:

- **Prompt:** "Escribe una receta de cocina siguiendo el siguiente formato: Ingredientes, Instrucciones y Consejos. Aquí tienes un ejemplo de cómo quiero que se vea:

- \* Ingredientes:

- 2 tazas de harina
- 1 taza de azúcar

- \* Instrucciones:

- Precalentar el horno a 180°C.
- Mezclar los ingredientes secos.

- \* Consejos:

- Asegúrate de tamizar la harina para obtener una textura suave."

Ahora genera una receta para hacer brownies.

- **Proporcionar ejemplos de comportamiento:** Si estás buscando un tipo específico de respuesta o comportamiento, puedes ofrecer un ejemplo de lo que esperas, lo cual le dará a ChatGPT una mejor idea de cómo actuar.

Ejemplo:

- "Cuando expliques un término técnico, quiero que uses el siguiente enfoque:

1. Definición del término.
2. Ejemplo de uso en el mundo real.
3. Comparación con conceptos relacionados. Ahora, usa este formato para explicar el término 'machine learning'."

### 3.4 Ejemplos de prompts avanzados

- **Generar un documento detallado:**

- **Prompt:** "Escribe un informe de 3 secciones sobre la importancia de la ciberseguridad en empresas. La primera sección debe ser sobre los riesgos principales, la segunda sobre las mejores prácticas de seguridad, y la tercera debe incluir recomendaciones para implementar medidas de seguridad."

- **Generar código con comentarios:**

- **Prompt:** "Escribe un programa en Python que calcule la suma de los números del 1 al 100. Asegúrate de incluir comentarios que expliquen cada paso del código."

# IAGen

## COPILOT CON LA HOJA DE CÁLCULO EN EXCEL

### Copilot: Tu compañero inteligente de Microsoft

Microsoft Copilot es una innovadora inteligencia artificial diseñada para asistir a los usuarios en una amplia variedad de tareas. Desde responder preguntas hasta ayudar en la creación de contenido, Copilot es un compañero virtual que combina el poder de la IA con una interfaz conversacional intuitiva.

#### ¿Qué es Copilot?

Copilot es un asistente basado en inteligencia artificial que utiliza modelos avanzados de lenguaje para procesar información, entender el contexto de una conversación y generar respuestas útiles, relevantes y bien estructuradas. Es capaz de analizar texto, interpretar imágenes y realizar búsquedas en la web para proporcionar información actualizada.

Desarrollado por Microsoft, Copilot está diseñado para ser una herramienta versátil en distintas áreas:

- **Apoyo en tareas diarias:** Puede ayudar con la redacción de correos electrónicos, resúmenes, informes, documentos y presentaciones.
- **Resolución de dudas:** Responde preguntas sobre una amplia gama de temas, desde ciencia y tecnología hasta historia y cultura.
- **Asistencia en programación:** Puede generar y corregir código en varios lenguajes de programación, facilitando el trabajo de desarrolladores.
- **Creatividad y escritura:** Ayuda en la elaboración de textos creativos, desde historias y poemas hasta discursos y ensayos.
- **Búsqueda de información:** Puede acceder a fuentes en línea para ofrecer respuestas basadas en información actualizada.

#### ¿Cómo funciona Copilot?

Copilot utiliza un modelo de lenguaje de última generación que le permite analizar la información ingresada por el usuario y generar respuestas precisas y útiles. Su funcionamiento se basa en

la comprensión del contexto y la formulación de respuestas adecuadas según la necesidad del usuario.

Además, cuenta con herramientas adicionales, como:

- **Generación de imágenes:** Puede crear ilustraciones basadas en una descripción textual dada por el usuario.
- **Análisis de imágenes:** Interpreta contenido visual para ofrecer descripciones detalladas y relevantes.
- **Procesamiento de datos:** Ayuda a organizar y sintetizar información en tablas y listas estructuradas.

### ¿Por qué usar Copilot?

Copilot es una solución ideal para quienes buscan optimizar su tiempo y mejorar su productividad. Gracias a su capacidad para procesar grandes volúmenes de información en segundos, se convierte en un aliado invaluable, tanto en el ámbito personal como profesional.

Ya sea para mejorar la eficiencia en el trabajo, facilitar el aprendizaje o simplemente explorar nuevas ideas, Copilot está diseñado para hacer que las tareas diarias sean más ágiles e intuitivas.

## Copilot en Excel: Potenciando tu productividad

Microsoft Copilot está integrado en Excel para ayudar a los usuarios a trabajar de manera más eficiente con sus hojas de cálculo. Gracias a su capacidad de procesamiento inteligente, Copilot puede automatizar cálculos, analizar datos y generar informes, facilitando la toma de decisiones.

### ¿Cómo ayuda Copilot en Excel?

#### 1. Generación de fórmulas automáticas:

- Sugiere y crea fórmulas complejas sin necesidad de que el usuario conozca la sintaxis exacta.
- Por ejemplo, si necesitas calcular el promedio de una columna, puedes pedirle a Copilot que genere la fórmula adecuada.

#### 2. Análisis de datos y tendencias:

- Identifica patrones en los datos y ofrece visualizaciones claras, como gráficos y tablas dinámicas.
- Puede ayudarte a detectar tendencias de ventas, proyecciones financieras y comportamiento de clientes.

#### 3. Automatización de tareas repetitivas:

- Puede generar macros o scripts para automatizar procesos recurrentes, reduciendo el trabajo manual.

- Por ejemplo, puede organizar y limpiar datos con solo una instrucción.

#### 4. Explicación de datos y resultados:

- Copilot puede interpretar los datos de una hoja de cálculo y generar informes detallados con resúmenes comprensibles.
- Puede ayudarte a responder preguntas como: "¿Cuál es la categoría de producto más rentable?" o "¿Cuáles fueron los meses con mayores ventas?".

#### 5. Optimización de modelos financieros y estadísticos:

- Asiste en la creación de modelos predictivos y proyecciones financieras con base en datos históricos.
- Puede sugerir fórmulas avanzadas para cálculos financieros como el VAN (Valor Actual Neto) o la TIR (Tasa Interna de Retorno).

### ¿Cómo usar Copilot en Excel?

Si tienes acceso a Microsoft 365 con Copilot, puedes interactuar con él dentro de Excel utilizando un campo de texto donde le das instrucciones naturales. Puedes escribir consultas como:

- "Genera un gráfico que muestre la tendencia de ventas en los últimos seis meses."
- "Analiza estos datos y dime cuáles son los productos más rentables."
- "Optimiza esta tabla para eliminar datos duplicados."

Con Copilot en Excel, el procesamiento de datos se vuelve más ágil, intuitivo y eficiente. Ya no es necesario ser un experto en hojas de cálculo para obtener información valiosa rápidamente.

### Ejemplo:

#### Un prompt ejecutado en Copilot:

Por favor, escribir 10 ejemplos de prompts variados que se puedan ejecutar en Copilot utilizando la hoja de cálculo Excel. Estos 10 prompts quiero que sean de diferentes temas, como, por ejemplo, gráficos, operaciones y uso de Python O.O en Excel, etc.

**Respuesta de Copilot:** ¡Por supuesto! Aquí tienes 10 ejemplos de prompts variados que puedes usar con Copilot en Excel, abordando diferentes temas y funcionalidades avanzadas:

#### 1. Gráficos y visualización de datos:

*"Genera un gráfico de barras que muestre la evolución de las ventas mensuales en los últimos dos años."*

#### 2. Tablas dinámicas:

*"Crea una tabla dinámica que agrupe los datos de ingresos por región y categoría de producto."*

#### 3. Fórmulas matemáticas y estadísticas:

*"Calcula el promedio, la mediana y la desviación estándar de los valores de la columna 'Ingresos'."*

4. **Automatización con macros:**  
*"Genera una macro que elimine filas duplicadas y ordene los datos por fecha de manera descendente."*
5. **Análisis de tendencias:**  
*"Identifica los meses con mayor crecimiento en ventas y sugiere estrategias para optimizar la rentabilidad."*
6. **Uso de Python en Excel: (Office Scripts o integración con Pandas)**  
*"Escribe un script en Python que importe los datos de la hoja actual a un DataFrame con Pandas y calcule el total de ingresos por categoría."*
7. **Predicción de datos con modelos simples:**  
*"Basado en los datos históricos, predice las ventas del próximo trimestre utilizando una regresión lineal."*
8. **Limpieza y organización de datos:**  
*"Elimina los espacios en blanco de las celdas, corrige errores tipográficos y estandariza los formatos de fecha."*
9. **Finanzas y evaluación de rentabilidad:**  
*"Calcula el Valor Actual Neto (VAN) y la Tasa Interna de Retorno (TIR) para esta inversión."*
10. **Búsqueda de datos y análisis en profundidad**  
*"Encuentra los productos con mayor margen de beneficio y sugiere estrategias para incrementar la rentabilidad."*

### **Ejercicio:**

Escribir en Copilot, ejecutar y estudiar el resultado de los 10 prompts anteriores.

## HERRAMIENTAS RECOMENDADAS

Tema	Software / Herramienta	Propósito en clase
<b>Lógica</b>	ChatGPT	Generar tablas de verdad y explicar razonamientos.
	Kahoot / Quizziz	Evaluar con juegos interactivos.
<b>Teoría de Conjuntos</b>	GeoGebra (diagramas de Venn)	Visualizar operaciones de conjuntos.
	ChatGPT	Crear ejemplos y problemas aplicados.
<b>Conjuntos Numéricos</b>	Matific	Actividades con naturales, enteros y fracciones.
	GeoGebra	Representar en la recta numérica.
	Khan Academy	Ejercicios guiados.
<b>Números Reales</b>	Desmos	Representar intervalos y subconjuntos.
	GeoGebra	Aproximaciones decimales.
	ChatGPT	Generar problemas explicados.
<b>Valor Absoluto</b>	GeoGebra	Graficar funciones con valor absoluto.
	ChatGPT	Resolver desigualdades paso a paso.
<b>Números Complejos</b>	GeoGebra	Representación en el plano complejo.
	Python (sympy, matplotlib)	Operaciones y gráficas de complejos.
	ChatGPT	Problemas aplicados y explicaciones.
<b>Exponentes y Radicales</b>	Khan Academy	Ejercicios con retroalimentación automática.
	ChatGPT	Simplificación de expresiones.
	Desmos	Graficar funciones exponenciales y radicales.
<b>Expresiones Algebraicas</b>	GeoGebra Algebra	Simplificación de polinomios.
	ChatGPT	Explicación de factorización y desarrollos.
<b>Expresiones Racionales</b>	GeoGebra	Visualizar restricciones de dominio.
	Python (sympy)	Simplificación algebraica automática.
	Khan Academy	Práctica guiada.
<b>Ecuaciones</b>	Desmos	Resolver y graficar ecuaciones.
	GeoGebra CAS	Resolución simbólica.
	ChatGPT	Explicación de métodos de resolución.
<b>Desigualdades</b>	GeoGebra	Graficar desigualdades lineales y cuadráticas.
	Desmos	Representar regiones de solución.
	ChatGPT	Problemas aplicados paso a paso.
<b>Geometría Euclidiana</b>	GeoGebra Geometry	Construcción de figuras y teoremas.
	Cabri Geometry	Construcciones dinámicas.
	ChatGPT	Explicar propiedades geométricas.
<b>Geometría Analítica</b>	GeoGebra	Graficar rectas, parábolas, circunferencias, elipses.
	Desmos	Visualización en el plano cartesiano.
	Python (sympy + matplotlib)	Graficar y calcular intersecciones.

# CONJUNTOS NUMÉRICOS

## NÚMEROS NATURALES Y NÚMEROS ENTEROS

### 1. Números Naturales ( $\mathbb{N}$ )

#### Definición y ejemplos

Los números naturales son aquellos que utilizamos para contar objetos. Se representan comúnmente como:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

En algunos textos se incluye el número cero, es decir,

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

#### Ejemplos:

- El número de estudiantes en un salón.
- El número de libros en una biblioteca.

#### Actividad interactiva

Applet para ubicar números naturales en la recta numérica: [Applet 1. GeoGebra](#)

#### Números primos y compuestos

- Un número **primo** es un número natural mayor que 1 que solo tiene dos divisores distintos: 1 y él mismo. Es decir, no se puede dividir exactamente (sin dejar residuo) entre ningún otro número.

#### Ejemplo:

- El 7 es primo porque solo se puede dividir exactamente entre 1 y 7.
- En cambio, el 8 no es primo porque se puede dividir entre 1, 2, 4 y 8.

Los primeros números primos son:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$$

- Un número **compuesto** es un número natural mayor que 1 que tiene más de dos divisores, es decir, además de dividirse entre 1 y él mismo, también se puede dividir entre otros números.

**Ejemplo:**

- El 12 es compuesto porque se puede dividir entre 1, 2, 3, 4, 6 y 12.
- En cambio, el 13 no es compuesto, porque solo se divide entre 1 y 13 (es primo).

Los primeros números compuestos en orden son:

$$4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, \dots$$

**Teorema fundamental de la aritmética**

Todo número natural  $n > 1$  puede escribirse de forma única (salvo el orden de los factores) como un producto de números primos.

**Ejemplos:**

- $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$
- $45 = 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5$
- $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$

**Actividad con IA**

Preguntar a la IA:

- "Explícame los números naturales como si fuera un niño de 7 años".
- "Genera ejemplos creativos (con frutas, pasos, sonidos, etc.)."
- "Refutar la afirmación: "10 es un número primo""
- "Descomponer los números 27, 63 y 90 en sus factores primos"

**Actividad interactiva**

Applet donde puedes revisar si un número es primo o compuesto. Si es compuesto muestra sus divisores: [Applet 2. GeoGebra](#)

## 2. Números Enteros ( $\mathbb{Z}$ )

### Definición y ejemplos

Este conjunto incluye a los números naturales, sus opuestos (negativos), y el cero. Se representan como:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

**Representación en la recta numérica:**

$$\dots \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots$$

**Ejemplos:**

- $-5$  representa una pérdida de 5 unidades.
- $0$  representa ausencia de cantidad.

### Números pares e impares

- Un número **par** es un número entero que puede dividirse exactamente entre 2, es decir, su división entre 2 no deja residuo. Además, se puede escribir de la forma:  $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$

**Ejemplo:**

- El 8 es par porque  $8 \div 2 = 4$ , sin residuo.
- El 7 no es par, porque  $7 \div 2 = 3$  y sobra 1 (es impar).
- Un número **impar** es un número entero que no se puede dividir exactamente entre 2, es decir, al dividirlo entre 2 siempre sobra 1. Además, se puede escribir de la forma:  $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$

**Ejemplo:**

- El 7 es impar porque  $7 \div 2 = 3$  y sobra 1.
- El 8 no es impar, porque se divide exactamente entre 2 (es par).

### Actividad interactiva

Applet para ubicar los números pares e impares en la recta numérica: [Applet 3. GeoGebra](#)

### Actividad con IA

Pedir a la IA:

- "Generar una analogía de los números enteros con temperaturas o deudas."
- "Dame un ejercicio con números enteros aplicado a economía doméstica".

## Actividad interactiva

Applet para sumar números enteros en la recta numérica: [Applet 4. GeoGebra](#)

## 3. Ejercicios propuestos

### Ejercicios con lápiz y papel

A continuación, para cada operación deberá verificar que el resultado sea correcto.

1.  $(-12) + 7 - (-8) + (-15) = -12$
2.  $(-5) \times (-3) + (-18) - 12 = -15$
3.  $[(-7) + 4 \times (-6)] - (-9) = -22$
4.  $(-10) + [(-8) \times (-2) - 5] + (-14) = -13$
5.  $(-3) \times [(-4) + (-7)] + 25 - (-6) = 64$
6. **Imagina que Laura tiene una alcancía.**
  - a) El lunes ahorró 20 mil pesos  $\rightarrow (+20)$ .
  - b) El martes tuvo que pagar una deuda de 15 mil pesos  $\rightarrow (-15)$ .
  - c) El miércoles su abuela le regaló 10 mil pesos  $\rightarrow (+10)$ .
  - d) El jueves gastó 25 mil pesos en una salida con amigos  $\rightarrow (-25)$ .
  - e) El viernes recibió 30 mil pesos de propina por ayudar en casa  $\rightarrow (+30)$ .

**Pregunta:**

¿Cuánto dinero tiene Laura en total en su alcancía después de toda la semana?

### Ejercicios con IAGen

A continuación, se proponen 5 ejercicios de demostración, cada uno con un prompt sugerido con el que se podrá resolver; su tarea es ejecutar el prompt en una herramienta de IAGen. Posteriormente, deberá analizar e interpretar la respuesta para sustentarla en clase.

1. **Demuestra que la suma de dos números pares siempre es un número par.**

**Prompt sugerido:** "Explícame paso a paso, mediante una **demostración directa**, por qué la suma de dos números pares siempre resulta en un número par. Utiliza la definición formal de número par ( $n = 2k$ ) y desarrolla la demostración mostrando cada paso con ejemplos."

2. **Demuestra que el producto de un número par y cualquier número entero siempre es par.**

**Prompt sugerido:** "Realiza una **demostración directa** de que el producto entre un número par y cualquier número entero siempre da como resultado un número par. Usa la definición de número par y muestra la argumentación matemática detallada."

3. **Se afirma: "El producto de dos números primos siempre es primo". Refuta esta afirmación.**

**Prompt sugerido:** "Busca un contraejemplo que refute la afirmación: 'El producto de dos números primos siempre es primo'. Explica por qué el contraejemplo invalida la proposición y aclara la diferencia entre ser primo y ser compuesto."

4. **Demuestra que si un número entero  $n$  es impar, entonces  $n^2$  también es impar.**

**Prompt sugerido:** "Realiza una demostración por contrarrecíproco de la proposición: 'Si un número entero  $n$  es impar, entonces  $n^2$  también es impar'. Reescribe el enunciado en su forma contrarrecíproca y explica detalladamente cada paso."

5. **Demuestra por inducción que la suma de los primeros  $n$  números impares es igual a  $n^2$ , es decir:**

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

**Prompt sugerido:** "Utiliza el método de inducción matemática para demostrar que la suma de los primeros  $n$  números impares es igual a  $n^2$ . Explica paso a paso: el caso base, la hipótesis de inducción y la demostración del paso inductivo"

# CONJUNTOS NUMÉRICOS

## NÚMEROS RACIONALES

### ¿Qué son los números racionales?

Un número racional es aquel que puede expresarse como el cociente entre dos números enteros, siempre que el denominador sea distinto de cero. Es decir, un número racional tiene la forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

donde  $a$  es el numerador y  $b$  es el denominador. De esta forma, todos los números racionales representan una fracción o parte de un todo, y pueden escribirse como fracción, decimal exacto o decimal periódico.

### Ejemplos básicos

- $\frac{1}{2}$  representa la mitad de una unidad.
- $\frac{-3}{4}$  representa tres cuartos negativos.
- $\frac{10}{5} = 2$  es un número entero, pero también racional.
- $0,25 = \frac{1}{4}$  y  $0.\bar{3} = \frac{1}{3}$ .

### Prompts para trabajar con IA

Se propone que el estudiante practique el uso de la inteligencia artificial generativa a través de los siguientes *prompts* que puede ejecutar en su equipo:

1. **Prompt 1:** “Explicame qué son los números racionales usando ejemplos relacionados con la cocina (recetas, medidas de ingredientes).”
2. **Prompt 2:** “Genera una explicación de números racionales usando ejemplos deportivos, como estadísticas de partidos o porcentajes de efectividad.”
3. **Prompt 3:** “Muéstrame ejemplos de situaciones económicas donde aparezcan fracciones o porcentajes que representen números racionales.”
4. **Prompt 4:** “Dame una lista de ejemplos de números decimales exactos y decimales periódicos que sean racionales, con sus fracciones equivalentes.”

### Observación importante

- Los números enteros son un subconjunto de los racionales, ya que todo número entero  $n$  puede escribirse como  $\frac{n}{1}$ .
- Los decimales exactos o periódicos son siempre racionales.
- No todos los números decimales son racionales, por ejemplo  $\pi$  o  $\sqrt{2}$  no pueden expresarse como fracciones exactas: son números irracionales.

### Ejercicio interactivo

Ubicación de números racionales entre 0 y 1.

### Igualdad de números racionales (fracciones equivalentes)

Dos números racionales son iguales si representan la misma cantidad, aunque estén expresados con numeradores y denominadores distintos. En otras palabras, dos fracciones son **equivalentes** si, al simplificarlas o amplificarlas, se obtiene la misma fracción irreducible.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c, \quad b \neq 0, d \neq 0$$

### Ejemplos básicos

- $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ , ya que todas representan la mitad de una unidad.
- $\frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$ , porque ambas fracciones equivalen al mismo número racional.
- $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ , aplicando simplificación dividiendo numerador y denominador entre 5.

### Método de verificación

Para comprobar que dos fracciones son equivalentes, se utiliza el **producto cruzado**:

$$\frac{a}{b} \stackrel{?}{=} \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \stackrel{?}{=} \frac{8}{12} \Rightarrow 2 \cdot 12 = 24, 3 \cdot 8 = 24 \Rightarrow \text{Sí, son equivalentes.}$$

### Prompts para trabajar con IA

Para explorar mejor el concepto de fracciones equivalentes, se sugieren los siguientes *prompts*:

1. **Prompt 1:** “Explicame qué significa que dos fracciones sean equivalentes y genera tres ejemplos usando repartición de objetos (pizzas, tortas, barras de chocolate).”

2. **Prompt 2:** “Enséñame cómo usar el producto cruzado para verificar si dos fracciones son equivalentes, con ejemplos paso a paso.”
3. **Prompt 3:** “Crea una analogía visual para entender fracciones equivalentes, como dividir rectángulos o círculos en partes distintas.”
4. **Prompt 4:** “Dame una lista de fracciones equivalentes a  $\frac{5}{6}$ , mostrando tanto versiones simplificadas como amplificadas.”

### Observación importante

- La equivalencia de fracciones garantiza que diferentes representaciones numéricas pueden significar la misma cantidad.
- Comprender este concepto es esencial antes de realizar operaciones con fraccionarios, ya que muchas veces se necesita transformar fracciones a denominadores comunes.

### Ejercicio interactivo

[Comparación gráfica de fracciones equivalentes.](#)

## Operaciones con fraccionarios

Los números racionales permiten realizar las operaciones básicas de la aritmética: suma, resta, multiplicación y división. Cada una de estas operaciones tiene reglas específicas cuando se aplican a fracciones, y es fundamental comprenderlas para resolver expresiones más complejas.

### Suma y resta de fracciones

Para sumar o restar fracciones se distinguen dos casos:

1. **Con igual denominador:** Se suman o restan los numeradores y se conserva el denominador.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

**Ejemplo:**

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

2. **Con distinto denominador:** Se busca el **mínimo común múltiplo (m.c.m)** de los denominadores, y luego se convierten las fracciones a fracciones equivalentes con ese denominador común.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

**Ejemplo:**

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

## Ejercicio interactivo

### Representación de fracciones con un círculo.

## Multiplicación de fracciones

Para multiplicar dos fracciones, se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad b \neq 0, d \neq 0$$

**Ejemplo:**

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

## División de fracciones

Dividir dos fracciones equivale a multiplicar la primera por el inverso de la segunda:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \quad b \neq 0, c \neq 0$$

**Ejemplo:**

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

## Métodos de demostración

### 1. Demostración directa para la suma con distinto denominador

Queremos probar que:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad b, d \neq 0$$

**Prueba:** Partimos del lado izquierdo:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

Buscamos un denominador común, que puede ser  $bd$ . Entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}, \quad \frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$$

Sumando:

$$\frac{a \cdot d}{bd} + \frac{c \cdot b}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

que coincide con el lado derecho de la igualdad.

**Conclusión:** La fórmula se cumple por demostración directa.

## 2. Demostración indirecta para la multiplicación de fracciones

Queremos probar que:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

**Supongamos, por contradicción**, que esta fórmula no es válida.

Entonces existirían fracciones  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$  tales que:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \neq \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Pero recordemos que:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$$

lo cual, aplicando la definición de producto de fracciones como cocientes de enteros:

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Esto contradice nuestra suposición inicial.

**Conclusión:** Debido a la contradicción, la fórmula de multiplicación de fracciones es válida.

## 3. Demostración directa para la división de fracciones

Queremos probar que:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

**Prueba:** La división  $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$  significa “¿qué número multiplicado por  $\frac{c}{d}$  da  $\frac{a}{b}$ ?”. Sea  $x$  ese número. Entonces:

$$x \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

Multiplicamos ambos lados por  $\frac{d}{c}$  (inverso de  $\frac{c}{d}$ ):

$$x = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Así se obtiene la regla general de la división de fracciones.

**Conclusión:** La definición de cociente justifica la regla, y la demostración confirma su validez.

## Prompts para trabajar con IA

1. **Prompt 1:** “Explícame con ejemplos de cocina cómo se suman y restan fracciones con denominador igual y distinto.”
2. **Prompt 2:** “Enséñame cómo multiplicar y dividir fracciones paso a paso, con ejemplos numéricos y simplificaciones.”
3. **Prompt 3:** “Dame un problema de la vida cotidiana donde deba usar suma y multiplicación de fracciones al mismo tiempo, y muéstrame la solución.”
4. **Prompt 4:** “Explica por qué dividir por una fracción equivale a multiplicar por su inverso, usando un ejemplo gráfico o narrativo.”

### Observación importante

- Todas las operaciones con fracciones deben mantener la regla de que el denominador nunca puede ser cero.
- La simplificación de fracciones después de cada operación permite expresar el resultado en su forma más simple.

## Suma y resta de fracciones con el mismo denominador

Cuando dos fracciones poseen el mismo denominador, la suma o resta de ellas se realiza de manera sencilla: se suman o se restan los numeradores y se mantiene el mismo denominador.

En términos generales, si tenemos dos fracciones:

$$\frac{a}{m} \quad \text{y} \quad \frac{b}{m},$$

donde  $m \neq 0$ , entonces:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}, \quad \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

### Ejemplo 1: Suma

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}.$$

### Ejemplo 2: Resta

$$\frac{9}{11} - \frac{4}{11} = \frac{9-4}{11} = \frac{5}{11}.$$

### Método de demostración directa

La regla de suma y resta de fracciones con denominador común puede justificarse de manera **directa** al recordar que una fracción representa una división.

Sea  $\frac{a}{m}$  y  $\frac{b}{m}$ . Entonces:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}.$$

Esto se justifica porque ambas fracciones expresan partes de la misma unidad dividida en  $m$  partes iguales. Así, al juntar  $a$  partes con  $b$  partes, se obtiene un total de  $a+b$  partes de la misma unidad.

**Ejemplo ilustrativo:** Si una pizza está dividida en 8 pedazos iguales y una persona come 3 pedazos ( $\frac{3}{8}$ ) y otra come 2 pedazos ( $\frac{2}{8}$ ), en total se han consumido  $3+2=5$  pedazos, es decir,  $\frac{5}{8}$  de la pizza.

## Método de demostración indirecta

Para justificar la regla por un método **indirecto**, supongamos que la suma de fracciones con denominador común no se pudiera expresar de la forma  $\frac{a+b}{m}$ . Entonces, debería existir otra forma distinta de combinar los numeradores.

Sin embargo, si tratamos de representar la suma de  $\frac{a}{m}$  y  $\frac{b}{m}$  en un mismo denominador, necesariamente debemos tener:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{am}{m^2} + \frac{bm}{m^2} = \frac{am + bm}{m^2}.$$

Factorizando:

$$\frac{am + bm}{m^2} = \frac{m(a + b)}{m^2} = \frac{a + b}{m}.$$

De esta manera se demuestra que no puede existir una forma diferente a  $\frac{a+b}{m}$ , pues cualquier intento de escribir la suma en otro denominador nos lleva al mismo resultado.

## Prompts sugeridos con IA

Para fomentar la exploración con inteligencia artificial generativa, se sugieren los siguientes prompts que los estudiantes pueden ejecutar en casa:

- **Prompt 1:** “Explícame con ejemplos visuales cómo se realiza la suma de fracciones con el mismo denominador, usando situaciones cotidianas como pizzas o tortas.”
- **Prompt 2:** “Muéstreme cinco ejercicios de suma y resta de fracciones con el mismo denominador, con su respectiva solución paso a paso.”
- **Prompt 3:** “Hazme un quiz corto (3 preguntas) para practicar suma y resta de fracciones con igual denominador, con retroalimentación de mis respuestas.”

## Ejercicio interactivo

[Visualización de fracciones con diferente partición.](#)

## Suma y resta de fracciones con distinto denominador

Cuando dos fracciones tienen denominadores distintos, no es posible sumarlas o restarlas directamente. Es necesario transformarlas a fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Esto se logra utilizando el **mínimo común múltiplo (MCM)** de los denominadores.

En general, si tenemos dos fracciones:

$$\frac{a}{m} \quad \text{y} \quad \frac{b}{n}, \quad m, n \neq 0,$$

entonces:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an + bm}{mn}, \quad \frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{an - bm}{mn}.$$

**Ejemplo 1: Suma**

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{8}{12} + \frac{15}{12} = \frac{23}{12}.$$

**Ejemplo 2: Resta**

$$\frac{7}{6} - \frac{2}{9} = \frac{7 \cdot 3}{6 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{21}{18} - \frac{4}{18} = \frac{17}{18}.$$

**Método de demostración directa**

Podemos justificar esta regla de manera **directa** observando que toda fracción puede transformarse a un denominador común.

Sea:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n}.$$

Multiplicamos la primera fracción por  $\frac{n}{n}$  y la segunda por  $\frac{m}{m}$ , obteniendo:

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{n}{n} + \frac{b}{n} \cdot \frac{m}{m} = \frac{an}{mn} + \frac{bm}{mn}.$$

Al tener el mismo denominador, se pueden sumar directamente:

$$\frac{an}{mn} + \frac{bm}{mn} = \frac{an + bm}{mn}.$$

La resta se justifica de la misma forma:

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} - \frac{bm}{mn} = \frac{an - bm}{mn}.$$

**Método de demostración indirecta**

Supongamos **indirectamente** que la regla no es correcta y que:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} \neq \frac{an + bm}{mn}.$$

Si fuera así, entonces debería existir otra fracción equivalente que representara la suma.

Pero si llevamos ambas fracciones al mismo denominador  $mn$ :

$$\frac{a}{m} = \frac{an}{mn}, \quad \frac{b}{n} = \frac{bm}{mn}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} + \frac{bm}{mn} = \frac{an + bm}{mn}.$$

Esto contradice la suposición inicial, así que la única forma válida de expresar la suma (o resta) es mediante  $\frac{an \pm bm}{mn}$ .

## Prompts sugeridos con IA

Para fomentar el aprendizaje activo con inteligencia artificial generativa, se recomiendan los siguientes prompts:

- **Prompt 1:** “Explicame paso a paso cómo sumar y restar fracciones con distinto denominador, usando ejemplos con dibujos o analogías cotidianas.”
- **Prompt 2:** “Genera 10 ejercicios de suma y resta de fracciones con distinto denominador, desde nivel básico hasta avanzado, con soluciones detalladas.”
- **Prompt 3:** “Crea un juego o actividad interactiva donde tenga que practicar suma y resta de fracciones con distinto denominador.”

## Multiplicación y división de fracciones

Las operaciones de multiplicación y división con fracciones siguen reglas específicas que permiten simplificar los cálculos de manera ordenada.

### Multiplicación de fracciones

Si tenemos dos fracciones:

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d}, \quad b, d \neq 0,$$

su producto se obtiene multiplicando numeradores entre sí y denominadores entre sí:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

#### Ejemplo 1

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

#### Ejemplo 2

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{40}.$$

### Ejercicio interactivo

[Representación gráfica de la multiplicación de fracciones](#)

## División de fracciones

Para dividir dos fracciones:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}, \quad b, d \neq 0,$$

se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

### Ejemplo 1

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}.$$

### Ejemplo 2

$$\frac{7}{9} \div \frac{14}{15} = \frac{7}{9} \cdot \frac{15}{14} = \frac{105}{126} = \frac{5}{6}.$$

## Método de demostración directa

- Multiplicación:** La fracción  $\frac{a}{b}$  significa  $a$  partes de un todo dividido en  $b$  partes. Si tomamos también  $\frac{c}{d}$ , entonces el producto debe representar la fracción de una fracción. Es decir,  $\frac{a}{b}$  veces  $\frac{c}{d}$ . Por la propiedad fundamental de la multiplicación:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

- División:** Dividir  $\frac{a}{b}$  entre  $\frac{c}{d}$  significa preguntar: “¿cuántas veces cabe  $\frac{c}{d}$  dentro de  $\frac{a}{b}$ ?”. Esto equivale a multiplicar  $\frac{a}{b}$  por el recíproco de  $\frac{c}{d}$ :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

## Método de demostración indirecta

- Multiplicación:** Supongamos que  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$  no es igual a  $\frac{ac}{bd}$ . Entonces debería existir otra expresión distinta. Pero al representar ambas fracciones en forma decimal:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}, \quad \frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b}.$$

Al multiplicarlas:

$$\frac{a \cdot d}{b \cdot d} \cdot \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ac}{bd}.$$

Lo que contradice la suposición inicial.

- **División:** Supongamos que  $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \neq \frac{ad}{bc}$ . Entonces, por definición de división de fracciones, al multiplicar el resultado por  $\frac{c}{d}$  deberíamos obtener  $\frac{a}{b}$ . Sea  $x = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ . Entonces:

$$x \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Resolviendo para  $x$ :

$$x = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Lo cual confirma la fórmula original.

## Prompts sugeridos con IA

Para el trabajo independiente del estudiante con apoyo de IAGen, se proponen los siguientes prompts:

- **Prompt 1:** “Explicame con ejemplos prácticos cómo funciona la multiplicación de fracciones y haz un dibujo para ilustrarlo.”
- **Prompt 2:** “Enséñame la división de fracciones paso a paso, con situaciones de la vida real.”
- **Prompt 3:** “Genérame 10 ejercicios variados de multiplicación y división de fracciones, con soluciones explicadas.”
- **Prompt 4:** “Hazme un test de 5 preguntas interactivas sobre multiplicación y división de fracciones, con retroalimentación inmediata.”

## Taller de problemas con fraccionarios

A continuación, se presentan cinco problemas prácticos que involucran fracciones. Estos ejercicios buscan que el estudiante aplique las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de fraccionarios en contextos reales.

### Problema 1

En una fiesta, se consumió  $\frac{3}{8}$  de un pastel en la mañana y  $\frac{2}{8}$  en la tarde.

- ¿Qué fracción del pastel se consumió en total?
- ¿Qué fracción del pastel sobró?

### Problema 2

Un agricultor sembró  $\frac{2}{5}$  de su terreno con maíz y  $\frac{1}{4}$  con fríjol.

- ¿Qué fracción del terreno fue sembrado en total?
- ¿Qué fracción del terreno quedó sin sembrar?

### Problema 3

Un obrero completó  $\frac{3}{7}$  de una obra en la primera semana y  $\frac{4}{7}$  en la segunda.

- ¿Cuánto de la obra terminó en total?
- ¿La obra quedó terminada o incompleta?

### Problema 4

En una receta de cocina se necesitan  $\frac{2}{3}$  de taza de azúcar y  $\frac{3}{5}$  de taza de harina.

- ¿Qué cantidad total de ingredientes (en fracciones de taza) se requiere?
- Si la receta se duplica, ¿cuánto de cada ingrediente se necesita?

### Problema 5

Un estudiante dedica  $\frac{3}{10}$  de su tiempo al estudio de matemáticas,  $\frac{2}{5}$  a física y  $\frac{1}{6}$  a química.

- ¿Qué fracción de su tiempo dedica a estas tres materias en conjunto?
- ¿Cuánto tiempo le queda para otras actividades?

### Prompts sugeridos con IA

Para resolver estos problemas con el apoyo de inteligencia artificial generativa, se sugieren los siguientes prompts que incluyen el contexto del taller. Los estudiantes pueden copiarlos y ejecutarlos directamente:

- **Prompt 1:** “Resuelve paso a paso el Problema 1 del taller de fraccionarios: En una fiesta se consumió  $\frac{3}{8}$  de un pastel en la mañana y  $\frac{2}{8}$  en la tarde. Indica qué fracción del pastel se consumió en total y cuál fracción sobró.”
- **Prompt 2:** “Explícame con detalle la solución del Problema 2 del taller de fraccionarios: Un agricultor sembró  $\frac{2}{5}$  de su terreno con maíz y  $\frac{1}{4}$  con frijol. Calcula la fracción del terreno sembrado en total y la fracción que quedó sin sembrar.”
- **Prompt 3:** “Resuelve todos los problemas del taller de fraccionarios (del 1 al 5) mostrando cada procedimiento paso a paso y explicando las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de fracciones que se usen.”
- **Prompt 4:** “Crea 3 problemas adicionales similares a los del taller de fraccionarios, relacionados con situaciones de la vida cotidiana (recetas, deportes, economía doméstica) y resuélvelos.”

### Ejercicios combinados (fracciones compuestas)

En esta sección se proponen ejercicios del estilo *fracción de fracciones* y combinaciones encadenadas de suma, resta, multiplicación y división, similares al ejemplo dado. Indicación general: **resuelve y simplifica el resultado final**, mostrando el procedimiento paso a paso.

## Ejercicios propuestos

1. Verifica la igualdad dada en clase:

$$\frac{\frac{7}{10} - \frac{2}{10}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{7}{4}}{2 - \frac{1}{4}} = 2.$$

2. Calcula el valor de:

$$\frac{\frac{5}{12} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{9}{5}}{3 - \frac{2}{5}}.$$

3. Calcula el valor de:

$$\frac{\frac{3}{8} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{2}}{3 - \frac{1}{2}}.$$

4. Calcula el valor de:

$$\frac{\frac{4}{9} + \frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{7}{3}}{2 - \frac{1}{6}}.$$

5. Calcula el valor de:

$$\frac{\frac{5}{6} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{9}{4}}{5 - \frac{1}{4}}.$$

6. Calcula el valor de:

$$\frac{\frac{7}{15} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{\frac{5}{2}}{4 - \frac{3}{4}}.$$

## Prompts de práctica con IA Generativa

Para trabajar con IA y verificar tus procedimientos, copia y pega estos prompts (incluyen el contexto exacto de cada ejercicio):

- Verifica paso a paso que  $((7/10 - 2/10)/(1 - 1/2)) + ((7/4)/(2 - 1/4))$  es igual a 2. Explica cada transformación y simplificación.
- Resuelve y simplifica:  $((5/12 + 1/3)/(1 - 1/4)) + ((9/5)/(3 - 2/5))$ . Muestra el procedimiento detallado (mcm, simplificación y fracciones equivalentes).
- Resuelve y simplifica:  $((3/8 + 1/4)/(1 - 1/2)) + ((3/2)/(3 - 1/2))$ . Explica por qué dividir entre  $1/2$  equivale a multiplicar por 2.
- Resuelve y simplifica:  $((4/9 + 2/9)/(1 - 1/3)) + ((7/3)/(2 - 1/6))$ . Indica claramente cuándo conviertes a denominador común.
- Resuelve y simplifica:  $((5/6 - 1/3)/(1 - 1/2)) + ((9/4)/(5 - 1/4))$ . Justifica cada paso con propiedades de fracciones.
- Resuelve y simplifica:  $((7/15 + 1/5)/(1 - 2/3)) + ((5/2)/(4 - 3/4))$ . Al final, expresa el resultado en fracción irreducible.
- Génrame 5 ejercicios nuevos del mismo estilo (fracciones compuestas con sumas, restas y divisiones anidadas) y entrégame soluciones paso a paso.

## Ejercicios combinados (4 operaciones)

Resuelve y **simplifica** cada expresión. Usa suma, resta, multiplicación y división de fracciones. Expresa el resultado en fracción irreducible (y en número mixto si aplica).

### Ejercicios

1.

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{4}\right) \div \frac{3}{5}$$

2.

$$\left(\frac{7}{8} - \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{4}{15} \cdot \frac{5}{6}\right)$$

3.

$$\left(\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}\right) + \frac{5}{12} - \frac{1}{6}$$

4.

$$\left(\frac{9}{5} \cdot \frac{2}{7}\right) \div \left(\frac{3}{14}\right) + \frac{1}{2}$$

5.

$$\left(\frac{5}{9} + \frac{7}{12}\right) \cdot \left(\frac{8}{15} - \frac{1}{5}\right)$$

6.

$$1 - \left[\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}\right) - \left(\frac{5}{6} \div \frac{5}{9}\right)\right]$$

7.

$$\left(\frac{7}{3} - \frac{5}{2}\right) \div \left(\frac{4}{9}\right) + \frac{2}{3}$$

8.

$$\left(\frac{11}{12} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{5}$$

9.

$$\left(\frac{5}{8} \div \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{7}{6} \cdot \frac{3}{7}\right) + \frac{2}{9}$$

10.

$$\left(2 - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{5}{14}\right)$$

11.

$$\left(\frac{13}{6} \div \frac{13}{12}\right) - \left(1 - \frac{5}{8}\right) \cdot \frac{3}{4}$$

12.

$$\left(\frac{3}{10} + \frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{10}\right) - 1$$

## Prompts de práctica con IA

Copia y pega cualquiera de los siguientes prompts (con el contexto exacto) para obtener una guía paso a paso:

- Resuelve paso a paso el Ejercicio 1 de la sección "Ejercicios combinados (4 operaciones)":  $((2/3 + 5/6 - 1/4) / (3/5))$ . Explica mcm, simplificación y cada operación.
- Resuelve el Ejercicio 3:  $((3/4) / (2/3)) + 5/12 - 1/6$ . Justifica por qué dividir por  $2/3$  equivale a multiplicar por  $3/2$ .
- Resuelve el Ejercicio 5:  $((5/9 + 7/12) * (8/15 - 1/5))$ . Muestra el uso de denominadores comunes y la reducción final.
- Resuelve el Ejercicio 6:  $1 - ((2/3 * 9/4) - (5/6 / 5/9))$ . Explica las prioridades de operación y simplifica al final.
- Resuelve el Ejercicio 10:  $(2 - 3/5) * (4/7 + 1/2) / (5/14)$ . Indica cada transformación intermedia y entrega la fracción irreducible.