REDES NEURONALES CON CONEXIONES HACIA ADELANTE: EL PERCEPTRÓN

1 Modelo del Perceptrón: Interpretación geométrica y computacional

El perceptrón es uno de los modelos fundamentales dentro de las redes neuronales con conexiones hacia adelante. Se utiliza como clasificador lineal y aprende mediante un esquema supervisado. Su funcionamiento se basa en combinar las entradas mediante pesos, comparar el resultado con un umbral θ y decidir entre dos clases distintas.

1.1 Cálculo de la entrada neta y salida de la neurona

Dadas entradas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y pesos $w_1, w_2, \ldots, w_n$, la *entrada neta* es

$$Net = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i - \theta.$$

La salida del perceptrón está determinada por la función escalón bipolar

$$f(Net) = \begin{cases} +1, & Net \geq 0, \\ -1, & Net < 0. \end{cases}$$

El parámetro θ desplaza la frontera de decisión y permite controlar qué regiones del espacio de entrada activan la neurona.

1.2 Regiones de decisión y separación mediante un hiperplano

El conjunto de puntos que satisfacen $Net = 0$ define un hiperplano en $\mathbb{R}^n$:

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n - \theta = 0.$$

Dicho hiperplano divide el espacio en dos regiones: una donde la salida es $+1$ y otra donde la salida es -1. El entrenamiento del perceptrón consiste en ajustar los pesos para obtener la frontera adecuada entre las clases.

Luis Fernando Alvarez V.   Leonardo Alvarez V.   Hernando Alvarez R.
lfalvare@utp.edu.co   lalvarez@utp.edu.co   healvare@utp.edu.co

1.3 Gráfico: hiperplano de decisión en dos dimensiones

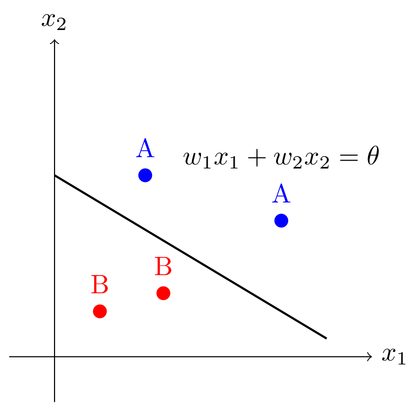

Figure 1: Frontera de decisión inducida por el perceptrón en dos dimensiones.

1.4 Aplicación del modelo a la función OR

La función OR combina dos entradas binarias. La red debe producir salida -1 para $(0,0)$ y salida $+1$ para los patrones $(0,1)$, $(1,0)$ y $(1,1)$. La ecuación de la entrada neta es:

$$Net = w_1x_1 + w_2x_2 - \theta.$$

Como este problema es linealmente separable, existe un conjunto de pesos que define una recta que divide correctamente el plano en dos regiones.

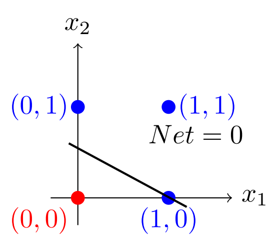

Figure 2: Separación lineal de la función OR.

1.5 El papel del umbral en la función AND

En el caso de la función AND, la separación resulta imposible si $\theta = 0$, pues la recta debería pasar por el origen para satisfacer la ecuación:

$$w_1x_1 + w_2x_2 = 0.$$

Luis Fernando Alvarez V. lfalvare@utp.edu.co
Leonardo Alvarez V. lalvarez@utp.edu.co
Hernando Alvarez R. healvare@utp.edu.co

Sin embargo, para separar $(1, 1)$ del resto, es necesario desplazar la frontera:

$$Net = w_1x_1 + w_2x_2 - \theta.$$

El término $-\theta$ actúa como un *sesgo* que permite encontrar una recta que ya no está obligada a pasar por el origen, aumentando la capacidad representativa del modelo.

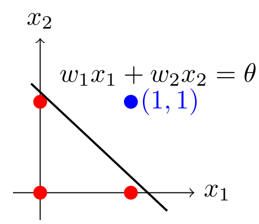

Figure 3: El umbral θ permite separar la función AND.

1.6 Etapa de aprendizaje

Durante el entrenamiento, los pesos se ajustan con el fin de obtener las salidas correctas para cada patrón del conjunto de entrenamiento. El objetivo es que, después del proceso, la frontera de decisión clasifique correctamente todos los ejemplos, siempre que el problema sea linealmente separable.

Matemáticamente, un perceptrón implementa un mapa escalar

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

donde la decisión final depende del signo de la entrada neta.

Luis Fernando Alvarez V. lfalvare@utp.edu.co
Leonardo Alvarez V. lalvarez@utp.edu.co
Hernando Alvarez R. healvare@utp.edu.co