APLICACIONES DEL PROCESO DE POISSON EN CONFIABILIDAD

CARLOS J. ZAPATA
Profesor
Escuela de Tecnología Eléctrica
Universidad Tecnológica de Pereira
cjzapata@utp.edu.co

RESUMEN

Este artículo trata la aplicación del proceso estocástico de Poisson en estudios de confiabilidad de sistemas eléctricos.

ABSTRACT

This paper deals with the application of Poisson stochastic process in reliability studies of electrical power systems.

1. INTRODUCCIÓN

La confiabilidad en sistemas eléctricos estudia los factores que afectan la continuidad en el suministro de energía eléctrica.

Los componentes del sistema eléctrico están sometidos a fallas de naturaleza aleatoria debidas a:

1. Envejecimiento y deterioro de los materiales con los cuales están fabricados los componentes.

2. Valores extremos de fenómenos climatológicos como el viento, descargas atmosféricas, lluvias, etc.

3. Valores extremos de variables operativas como la demanda y los recursos para generación.

4. Otros eventos aleatorios como errores operativos, vandalismo, accidentes de tránsito, etc.

El primer tipo de evento puede considerarse “interno” al componente y los restantes “externos”.

Mejoras en la confiabilidad se logran mediante un alto grado en la redundancia de componentes o alto nivel de calidad. Sin embargo, por razones económicas no es posible la aplicación en forma extensa de estos conceptos.

Además, los eventos aleatorios pueden tener valores extremos desconocidos y pueden afectar simultáneamente todos los componentes del sistema o de una zona del mismo.

Por lo tanto, no es posible garantizar una continuidad en el servicio del ciento por ciento bajo todas las condiciones de operación ni es posible determinar en forma exacta cuándo o donde (en qué elemento) se presentará una falla.

En confiabilidad se han estudiado ampliamente los componentes utilizando modelos no reparables (funciones de vida exponencial, gaussiana, Weibull etc) y modelos reparables de una o varias etapas (Proceso de Markov, técnica de frecuencia y duración etc).

Estos modelos evalúan la probabilidad de falla o de sobrevivir a un tiempo dado de operación en el caso no reparable y la probabilidad de encontrar el componente en un estado operativo o de falla en el caso reparable, pero no muestran el proceso mediante el cual llegan las fallas.

Este artículo presenta la aplicación del proceso estocástico de Poisson en el estudio de la llegada de eventos aleatorios internos o externos que afectan la confiabilidad de un componente o sistema.

2. DEFINICIONES

2.1 Variable aleatoria

Es aquella para la cual no es posible conocer de antemano un valor exacto. La ocurrencia de determinados valores se expresa en términos de probabilidad. Una variable aleatoria puede ser continua, discreta o mixta.

Por ejemplo, el tiempo para falla de un componente es una variable aleatoria continua y el número de descargas atmosféricas que pueden ocurrir en una región es una variable aleatoria discreta (pueden ocurrir 0, 1, 2 o n descargas).

2.2 Proceso estocástico

Un proceso estocástico es una variable aleatoria indexada con un parámetro que, por lo general, es el tiempo. Más precisamente, un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias. Hay una variable aleatoria para cada valor del índice del proceso.

La probabilidad de ocurrencia de un valor de la variable aleatoria depende de la aleatoriedad del fenómeno y del índice del proceso estocástico. Un proceso estocástico puede ser continuo, discreto o mixto.

El proceso de Poisson es un proceso estocástico discreto pues el número de eventos que pueden ocurrir es una variable aleatoria discreta. Sin embargo, el índice del proceso de Poisson, en este caso el tiempo, es continuo.

3. EL PROCESO DE POISSON

La distribución de Poisson y su correspondiente proceso estocástico reciben nombre en honor al matemático francés Simeon Denis Poisson (1781-1840).

Si el número de eventos aleatorios, internos o externos, que llegan a un componente o sistema cumplen que:

1. Los eventos llegan uno a la vez.

2. El número de eventos que llegan durante un intervalo de tiempo no afecta el número de llegadas durante otro intervalo de tiempo.

3. Los eventos son independientes entre sí.

4. La tasa media de llegada de los eventos (λ) permanece constante.

Entonces, se dice que el proceso aleatorio de llegada de eventos es un proceso de Poisson con parámetro λ.

Matemáticamente, la probabilidad de que la variable aleatoria x sea igual a k eventos en el periodo de tiempo t está dada por la función de probabilidad de masa:

$$P(x=k) = (\lambda * t)^k / k! * e^{(-\lambda * t)} \qquad (1)$$

Donde:

x = 0, 1, 2, . . . n eventos, variable aleatoria discreta.

$t \geq 0$, índice del proceso, variable continua.

$\lambda > 0$, tasa de eventos.

La probabilidad que la variable aleatoria x sea menor o igual a k eventos en el periodo t está dada por la función de distribución acumulada de probabilidad:

$$P(x \leq k) = \sum_{x=0}^{k} (\lambda * t)^x / x! * e^{(-\lambda * t)} \qquad (2)$$

Las estadísticas del proceso de Poisson son:

Valor medio $\mu = \lambda * t$ (3)

Varianza $\sigma^2 = \lambda * t$ (4)

Es conveniente recordar que se debe tener cuidado al tomar decisiones o hacer inferencias con base en valores medios o esperados pues éstos indican lo que sería el promedio estadístico al observar muchas veces la variable aleatoria. No significan que sean el valor más probable o el que ocurre más frecuentemente. Además, el valor medio puede ser un valor imposible de obtener físicamente.

El parámetro λ se conoce como tasa de eventos o densidad de eventos y se mide como:

$$\lambda = \# \text{ de eventos / periodo de tiempo} \qquad (5)$$

Debido a la independencia entre los eventos, el proceso de Poisson es un proceso sin memoria pues la llegada de un evento no depende de los eventos que ya llegaron. Esto se conoce como la propiedad de "Markov".

Otra característica del proceso de Poisson es que cuenta únicamente la ocurrencia (llegada) de los eventos y no su no-ocurrencia

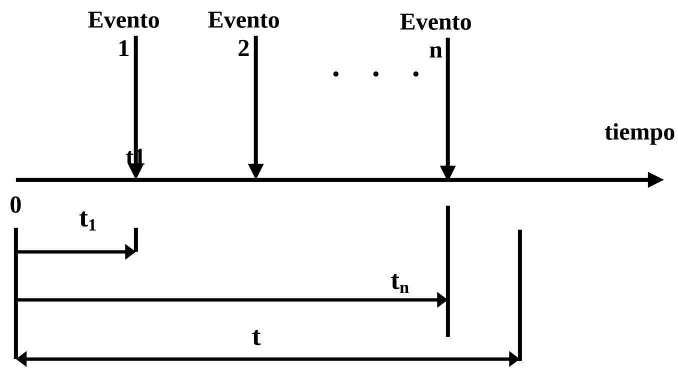

Figura 1. Tiempos para llegada de eventos aleatorios

Si se define un origen arbitrario 0 para medir el periodo de tiempo t en el cual se estudia el proceso de Poisson, tal como se muestra en la Figura 1, podemos determinar el tiempo para llegada del primer evento del proceso y el tiempo para llegada del enésimo evento.

El tiempo para llegada del primer evento del proceso de Poisson es una variable aleatoria t_1 que está definida por la función exponencial de la siguiente manera:

$$f(t_1) = \lambda * e^{(-\lambda * t)} \qquad (6)$$

$$F(t_1 \leq t) = 1 - e^{(-\lambda * t)} \qquad (7)$$

Las ecuaciones (6) y (7) son la función de densidad de probabilidad y la función de distribución de probabilidad, respectivamente.

La ecuación (7) evalúa la probabilidad de que el tiempo de llegada del primer evento aleatorio en el proceso de Poisson sea menor o igual a un valor dado t.

Las estadísticas de la distribución exponencial son:

Valor medio $\mu = 1/\lambda$ (8)

Varianza $\sigma^2 = 1/\lambda^2$ (9)

El tiempo para llegada del enésimo evento del Proceso de Poisson es una variable aleatoria t_n que está definida por la función de Erlang de la siguiente manera:

$$f(t_n) = \lambda^n/(n-1)! *t^{n-1}*e^{(-\lambda*t)} \qquad (10)$$

$$F(t_n \leq t) = \int_0^t f(t_n)\, dt \qquad (11)$$

La ecuación (11) expresa la probabilidad de que el tiempo de llegada del enésimo evento aleatorio en el proceso de Poisson sea menor o igual a un valor dado t.

La función de distribución de probabilidad de Erlang expresada en (11) no tiene una expresión analítica sencilla como en el caso de la distribución exponencial. La solución de la ecuación (11) es de la forma:

$$\int x^n e^{ax}\, dx = e^{ax}/a*[\, x^n - n*x^{n-1}/a + n*(n-1)*x^{n-2}/a^2 - \ldots\ (-1)^n n!/a^n\,] \qquad (12)$$

Dado que se conocen los límites de integración de la ecuación (11), lo más adecuado es hacer integración numérica.

Las estadísticas de la distribución de Erlang son:

Valor medio $\mu = n/\lambda$ (13)

Varianza $\sigma^2 = n/\lambda^2$ (14)

4. APLICACIÓN AL ESTUDIO DE LA CONFIABILIDAD DE COMPONENTES O SISTEMAS

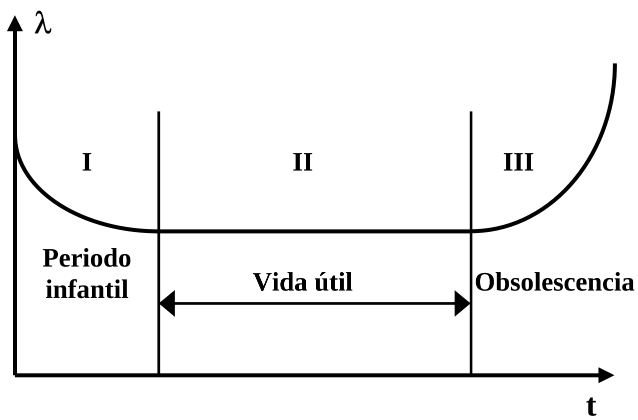

Figura 2. Variación de la tasa de fallas durante la vida de un componente.

Cuando el proceso de Poisson se utiliza para el modelamiento de la llegada de fallas a un componente o sistema se estudia directamente la confiabilidad y la tasa de eventos λ corresponde a una tasa de fallas.

Esta aplicación implica asumir que el componente o los componentes que forman el sistema se encuentran operando en su periodo de vida útil. Esto se debe a que solamente en este periodo la tasa de fallas es constante, tal como se muestra en la Figura 2, donde se observa que existen 3 zonas durante la vida de un componente:

1. La zona I es el llamado periodo infantil o de "debugging" donde aparecen fallas que son debidas a problemas en la fabricación o en el diseño.

2. La zona II constituye el periodo de vida útil. Las fallas en esta zona ocurren en forma aleatoria.

3. La zona III es el periodo de obsolescencia y se caracteriza por un incremento constante en la tasa de fallas.

A nivel de componente y sistema es importante verificar que las fallas sean independientes entre sí e independientes de los tiempos para reparación.

4.1 Componentes no reparables

Si el componente estudiado es no reparable, el proceso de Poisson aplica únicamente para la primera falla, pues al llegar ésta, el componente se dañará.

Debido a esto, es que las funciones de probabilidad para el tiempo de llegada del primer evento (En este caso una falla) en el proceso de Poisson corresponden a las mismas funciones que modelan la vida del componente y su probabilidad falla, como se muestra a continuación:

$$f(tf) = \lambda *e^{(-\lambda*t)} \qquad (15)$$

$$Q(tf \leq t) = 1 - e^{(-\lambda*t)} \qquad (16)$$

$$R(t) = 1 - Q(t) \qquad (17)$$

Donde:

f(tf): Función de densidad de fallas del componente.

Q(tf): Probabilidad de falla del componente. Indica la probabilidad de que el componente falle en un tiempo menor o igual a un t dado.

R(t): Confiabilidad del componente. Indica la probabilidad de que el componente sobreviva a un tiempo dado t.

Las ecuaciones (6) y (15) son iguales y lo mismo sucede con las ecuaciones (7) y (16).

4.2 Componentes reparables

En el caso de componentes reparables la aplicación del proceso de Poisson asume que los tiempos de reparación de las fallas son despreciables o que la reparación asociada a cada falla ocurre en forma instantánea. Si esto no es cierto, es necesario utilizar otra técnica, como por ejemplo, el proceso de Markov o la técnica de frecuencia y duración.

4.3 Cálculo de la tasa de fallas a partir de datos estadísticos

Cuando se tienen datos estadísticos de falla de varios componentes del mismo tipo, la tasa de fallas se calcula como:

$$\lambda = \frac{\text{\# de fallas en el periodo de tiempo}}{\text{\# de componentes expuestos a la falla}} \qquad (18)$$

Con la ecuación (18) se están caracterizando componentes del mismo tipo por medio de una tasa de fallas igual y constante. Por lo tanto, es importante verificar que el entorno y las condiciones de operación de los componentes sean las mismas.

4.4 <u>Ejemplo 1</u>

Las estadísticas para falla de transformadores en un sistema eléctrico con 100 de estos equipos son:

Tabla 1. Estadísticas de falla en transformadores

Año	Fallas
1	17
2	15
3	25
4	22
5	18
6	23
Σaños = 6	Σ fallas = 120

1. Tasa de fallas:

λ = 120 fallas/(6 años*100 trafos)=0.2 fallas/año-trafo

2. Valores esperados de falla: $\mu = 0.2*t$

Tabla 2. Valores esperados de falla

Periodo de tiempo [años]	Valor esperado [fallas]
1	0.2
5	1
10	2

Obsérvese que para el primer año el valor esperado de fallas es 0.2 el cual es imposible puesto que el número de fallas en un número entero.

Para los periodos de cinco y diez años los valores esperados de falla son 1 y 2, respectivamente. Estos valores tienen probabilidades de ocurrir de 36.78% y 27.06%, respectivamente, los cuales son muy bajos e ilustran el cuidado que se debe tener con el manejo de valores medios o esperados.

2. Probabilidad de llegada de fallas en diferentes periodos de tiempo: $P(x=k) = (0.2*t)^k / k! *e^{(-0.2*t)}$

Tabla 3. Probabilidad de llegada de fallas

Eventos (Fallas)	Periodo de tiempo [años]		
	1	5	10
0	0,818731	0,367879	0,135335
1	0,163746	0,367879	0,270671
2	0,016375	0,183940	0,270671
3	0,001092	0,061313	0,180447
4	0,000055	0,015328	0,090224
5	0,000002	0,003066	0,036089
6	0,000000	0,000511	0,012030
7	0,000000	0,000073	0,003437
8	0,000000	0,000009	0,000859
9	0,000000	0,000001	0,000191
10	0,000000	0,000000	0,000038

4. Probabilidad de tener al menos una falla:

P(al menos 1 falla)=1–P(no tener fallas)=1-P(x=0)

Tabla 4. Probabilidad de tener al menos una falla

Periodo de tiempo [años]	Probabilidad
1	0.181269
5	0.632121
10	0.864665

5. Probabilidad de falla de uno los transformadores: $Q(tf \leq t) = 1 - e^{(-0.2*t)}$

Tabla 5. Probabilidad de fallar en t≤to

to [años]	Probabilidad
1	0.181269
5	0.632121
10	0.864665

Tiempo medio para falla=1/ λ=1/0.2 fallas/año=5 años

Obsérvese que aunque el valor esperado para falla es de 5 años, la probabilidad de que el transformador falle en un tiempo menor o igual a ése es apenas del 63.21%.

Al comparar las Tablas 4 y 5 se concluye que la probabilidad de falla obtenida mediante la distribución exponencial es igual a la probabilidad de que ocurra por lo menos una falla en el proceso de Poisson.

6. Probabilidad de llegada de la tercera falla en un tiempo dado.

$$F(t_n \leq t) = \int_0^t 0.2^n/(n-1)! *t^{n-1}*e^{(-0.2*t)}\, dt$$

Tabla 6. Probabilidad de llegada de tercera falla en t≤to

to [años]	Probabilidad
1	0.0011485
5	0.0803014
10	0.3233236

Estas probabilidades coinciden con la probabilidad de que ocurran al menos 3 fallas en el Proceso de Poisson. Esto, se expresa como:

$$P(k\geq 3) = 1 - P(k0)-P(k=1)-P(k=2)$$

y puede verificarse con los datos de la Tabla 3.

5. APLICACIONES DE DISEÑO

El análisis de la llegada de eventos aleatorios externos a un componente o sistema sirve para evaluar su efecto sobre la confiabilidad de un diseño o la especificación de un equipo.

Por ejemplo, el número de descargas atmosféricas que inciden sobre un sistema eléctrico sirve para:

1. Diseñar el apantallamiento de líneas de transmisión y de subestaciones eléctricas. Se determina la probabilidad de falla del apantallamiento o la probabilidad de flameos inversos.

2. Determinar la especificación de pararrayos. La capacidad de un pararrayos se determina mediante el cálculo de la energía que debe disipar para un número de descargas atmosféricas sucesivas.

En ambos casos, es necesario conocer la probabilidad de que ocurran determinado número de descargas atmosféricas en un periodo de tiempo dado.

Se debe determinar el parámetro de la distribución de Poisson a partir de datos estadísticos o de modelos probabilísticos para la densidad de eventos.

Ejemplo de esto último, es la densidad de rayos a tierra dada por la fórmula de Ericksson:

$$Ng = 0.04\ T^{1.25} \tag{19}$$

Donde:

Ng: Densidad de rayos a tierra en [rayos/km^2-año]

T: Nivel isoceraúnico [Días de tormenta/año].

El nivel isoceraúnico es un dato estadístico para una región dada y se consigue en tablas o mapas.

La tasa de eventos, en este caso tasa de descargas atmosféricas, está dada por:

$$\lambda = Ng*A \qquad [\text{rayos/año}] \tag{20}$$

Donde:

A: Área de la instalación en km^2. Para apantallamiento de líneas o subestaciones se debe corregir por un factor que tenga en cuenta la altura de las estructuras.

<u>Ejemplo 2</u>

En una región se sabe por estadísticas que el nivel ceraúnico es de 50 días de tormenta por año. En la región se quiere construir una instalación de 250 m*250 m.

$Ng = 0.04*(50)^{1.25} = 5.318$ rayos/km^2-año $\cong$ 6 rayos/km^2-año

λ = 6 rayos/km^2-año * 6500*10^{-6} km^2 = 0.375 rayos/año

El procedimiento de cálculo es similar al ejecutado en el Ejemplo 1.

6. AJUSTE DE DATOS AL PROCESO DE POISSON

Previo a la aplicación del proceso de Poisson como modelo probabilístico para un proceso aleatorio es necesario determinar si el modelo planteado representa el fenómeno aleatorio real. Si esto no se hace, las inferencias que sobre el desempeño del sistema, de los componentes, de un diseño o una especificación, pueden estar totalmente equivocados.

La verificación del modelo incluye determinar el mejor parámetro del modelo (Tasa de eventos) y el nivel de confianza con que puede utilizarse.

6.1 El método de la máxima verosimilitud y la determinación del parámetro λ

Si se tienen n observaciones independientes, x1, x2, x3, ... xn de un proceso aleatorio, la función de densidad de probabilidad de obtener estos valores es igual al producto de las funciones de densidad de probabilidad o de probabilidad de masa individuales:

$$L(x,\lambda)=f(x1,\lambda)\ f(x2,\lambda)\ f(x3,\lambda)\ .\ .\ .\ f(xn,\lambda) \tag{21}$$

Donde L se denomina función de verosimilitud de la muestra. Para obtener el λ que maximiza L se hace:

$$dL(x,\lambda)/d\lambda = 0 \text{ y } d^2L(x,\lambda)/d^2\lambda < 0 \tag{22}$$

ó alternativamente:

$$d(Ln(L(x,\lambda))/d\lambda = 0 \text{ y } d^2(Ln(L(x,\lambda))/d^2\lambda < 0 \tag{23}$$

Para el proceso de Poisson se obtiene:

$$\lambda^* = \Sigma \text{ eventos} / n \qquad (24)$$

Es decir, el valor óptimo del parámetro del proceso de Poisson corresponde a un promedio estadístico. En este caso las n observaciones deben realizarse sobre periodos de tiempo iguales y n tiene unidades de tiempo pues representa los periodos de tiempo en los cuales se hicieron las observaciones.

El determinar el parámetro de una distribución de probabilidad a partir del método de la máxima verosimilitud no garantiza que el utilizar el modelo propuesto sea correcto pues cuando se escoge la distribución se está haciendo la hipótesis de que la distribución teórica planteada es la misma distribución real de los datos observados. Por lo tanto, es necesario determinar la bondad del ajuste del modelo.

6.2 La prueba χ^2 (Chi-cuadrado) y la bondad del ajuste

Se habla de la bondad del ajuste cuando se comparan las frecuencias de unos datos observados con los correspondientes valores de una distribución teórica.

La prueba Chi-cuadrado permite examinar la bondad de ajuste de funciones de probabilidad discretas como la distribución de Poisson y determina el grado de confianza con que la distribución teórica propuesta sirve para modelar los datos reales.

Esta prueba es muy sensible al tamaño de la muestra de datos y en general, no debe utilizarse cuando la frecuencia de clase esperada sea menor a 5. Sin embargo, es posible combinar datos de las clases adyacentes hasta que la frecuencia de clase esperada sea mayor o igual a 5.

Solo mediante la aplicación de la prueba Chi-cuadrado es posible determinar con qué nivel de confianza el modelo matemático planteado (Proceso de Poisson) representa el fenómeno aleatorio real.

Es decir, esta prueba permite verificar la hipótesis de que la distribución de Poisson con un parámetro dado representa un proceso aleatorio real bajo estudio.

7. CONCLUSIONES

1. El proceso de Poisson permite modelar la llegada de eventos aleatorios internos y externos que tienen relación directa con la confiabilidad de un componente o sistema.

2. Antes de su aplicación es necesario verificar que las condiciones de este modelo sean cumplidas. Especial cuidado debe tenerse en la independencia de los eventos aleatorios estudiados.

3. Es necesario determinar mediante la prueba Chi-cuadrado el nivel de confianza que tendrá el modelo para representar el fenómeno aleatorio real.

4. El proceso de Poisson se puede utilizar en confiabilidad para modelar la llegada de las fallas a un componente o sistema. Este modelamiento implica:

   - Que los componentes se encuentran en su periodo de vida útil.

   - Para los componentes reparables, las reparaciones ocurren en forma instantánea o sus tiempos son despreciables con respecto a los tiempos para falla.

5. El proceso de Poisson se puede aplicar en actividades relacionadas con la confiabilidad que requiere un diseño o especificación de un equipo ante la llegada de eventos aleatorios externos como descargas atmosféricas, inundaciones etc.

8. BIBLIOGRAFIA

[1] Viniotis Yannis, “Probability and Random Processes for Electrical Engineers”, McGraw Hill, 1998.

[2] Papoulis A, “Probability, Random Variables and Stochastic Processes”, McGraw Hill, 1991.

[3] Lawyer Gregory F, “Introduction to Stochastic Processes”, Chapman and Hall, 1995.

[4] Torres Alvaro, “Probabilidad, Variables Aleatorias, Confiabilidad y Procesos Estocásticos en Ingeniería Eléctrica”, Universidad de los Andes, 1993.

[5] Billinton R, Allan R, “Reliability Evaluation of Engineering Systems - Concepts and Techniques”, Plenum Press, 1992.

[6] IEEE, “Guide for Direct Lightning Stroke Shielding of Substations”, IEEE, 1996.

[7] Freund J, Miller I, “Probabilidad y estadística para ingenieros”, Prentice-Hall, 1992.